FINANSŲ RINKOS TEORIJŲ PAGRINDAI

Remigijus Leipus

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas
Naugarduko g. 24
LT-03225 Vilnius
El. p. remigijus.leipus@maf.vu.lt

Rimas Norvaiša

Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos institutas
Naugarduko g. 24
LT-03225 Vilnius
El. p. norvaisa@ktl.mii.lt

Straipsnyje apžvelgiama modernioji finansų rinkos teorija. Daugiausia dėmesio skiriama efektyviosios rinkos hipotezės ir jos vaidmeniui finansų rinkos teorijai aptarti. Matematinio finansų rinkos modelio samprata pateikiama aptariant akcijos kainos ir grąžos sąvokas, sąžiningojo lošimo hipotezę, analitinę efektyviosios rinkos formą ir fundamentaliąją vertę. Ypač daug dėmesio skiriama diskretaus ir tolydaus laiko modeliavimo ypatybėms išryškinti bei tolydaus laiko akcijos kainos kitimo aprašymo formai pagrįsti. Su arbitražo teorija supažindinama aptariant pirmąją bei antrąją fundamentaliąsias vertybių įkainojimo teoremas ir pagrindines sąvokas: bearbitražė rinka, rizikai neutralus matas ir pilnoji rinka. Portfelio teorija apibūdinama parodant, kaip kapitalo vertybių įkainojimo modelį lemia efektyviojo portfelio savybės.
Pagrindiniai žodžiai: modernioji finansų rinkos teorija; efektyviosios rinkos hipotezė; sąžiningojo lošimo hipotezė; fundamentalioji vertė; akcijos kaina ir grąža; Wiener procesas; arbitražas; rizikai neutralus matas; pilnoji rinka; portfelio teorija; kapitalo vertybių įkainojimo modelis.

Įvadas

Pagrindinis finansų rinkos teorijų uždavinys – aprašyti kainos susidarymo mechanizmą vertybinių popierių rinkoje. Nuo šio mechanizmo aprašymo priklauso, kaip yra sprendžiami visi kiti finansų rinkos klausimai: optimalaus portfelio sudarymas, finansinių priemonių įkainojimas ir pan. Straipsnyje apžvelgiama modernioji finansų rinkos teorija, kuri dėl to, kad iš esmės grindžiama matematika, dažnai vadinama tiesiog finansų matematika. Tačiau svarbiausia moderniosios finansų rinkos teorijos dalis – efektyviosios rinkos paradigma – apibrėžiama nevartojant matematinės kalbos. Šioje apžvalgoje siekiama parodyti, kaip dauguma finansų matematikos teiginių apibūdina minėtą efektyviosios rinkos sampratą. Apžvalgos pabaigoje minimos pomodernistinės finansų rinkų teorijos išsiskiria kitokiu požiūriu į tai, kas nulemia kainą. Tarp jų yra ir elgsenos finansų rinkos teorija, kurios vienam iš pradininkų D. Kahneman buvo paskirta Nobelio 2002 m. ekonomikos mokslų premija*.

Ši apžvalga skirta tiems, kurie su finansų rinkos teorijomis dar nebuvo susidūrę. Todėl čia vengiama gilintis į sudėtingus ar gilių matematikos žinių reikalingus šių teorijų aspektus. Vietoj to mėginama nupiešti bendrą šios srities paveikslą, siekiant paaiškinti pagrindines idėjas ir problemas. Leidinių, skirtų įvairiems finansų rinkos modeliavimo aspektams, sąrašas kiekvienais metais pailgėja keliomis dešimtimis ir

*Plačiau apie tai skaitykite straipsnyje „Nobelio 2002 m. ekonomikos mokslų premijos laureatai“, paskelbtame Lietuvos banko moksliniame leidinyje „Pinigų studijos“ (2003).

■ Remigijus Leipus – profesorius, fizinių mokslų habilituotas daktaras, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Ekonometrinės analizės katedra, Matematikos ir informatikos instituto vyriausiasis mokslinis darbuotojas. Veiklos sritys: laiko eilučių analizė, finansų ekonometrika, finansų matematika. Darbą iš dalies remia Lietuvos VMSF programa „Lietuvos ekonomikos matematiniai modeliai makroekonominiams procesams prognozuoti“ (registracijos Nr. C-03004).

■ Rimas Norvaiša – profesorius, fizinių mokslų habilituotas daktaras, Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto Ekonometrinės analizės katedra, Matematikos ir informatikos instituto vyriausiasis mokslinis darbuotojas, *Bachelier* finansų draugijos narys.
Veiklos sritys: šiurkščiųjų funkcijų analizė, finansų matematika ir matematinė ekonomika.

yra išties įspūdingas. Nenorėdami išskirti kurių nors iš jų, tiesiog siūlome žvilgterėti į virtualią knygų lentyną adresu *http://www.finmath.com*. Galima būtų rekomenduoti ką tik pasirodžiusią J. A. Paula (2003) knygą, kurioje autorius mėgina paaiškinti pagrindines finansų rinkos matematines koncepcijas vartojant ne formalią matematinę kalbą, bet literatūrines priemones, ir pasinaudoti savo nesėkminga investavimo rinkoje patirtimi. Šia prasme knyga skiriasi nuo ankstesnių gerai žinomų finansų teoriją ir praktiką populiarinančių darbų, tokių kaip B. G. Malkiel (1996) ir P. L. Bernstein (1992).

Finansų rinka vadinama tokia rinka, kurioje operuojama (prekiaujama, mainoma ir pan.) vertybiniais popieriais. Pavyzdžiui: a) bendrovių akcijos ir valstybės vertybiniai popieriai sudaro vertybinių popierių rinką; b) trumpalaikiai vertybiniai popieriai (indėliai, paskolos ir pan.) sudaro pinigų rinką; c) užsienio valiutos sudaro valiutų rinką; d) kitos rinkos, kuriose prekiaujama įvairiomis finansinėmis priemonėmis ar išvestiniais vertybiniais popieriais. Prie finansų rinkų taip pat priskiriamos ir investicinių prekių rinkos (brangiųjų metalų ir pan.). Lyginant paviršutiniškai, finansų rinkos skiriasi nuo vartojimo prekių rinkų savo dinamiškumu ir dideliu neapibrėžtumo laipsniu. Dėl šių savybių ir informacinių technologijų pažangos finansų rinkos sukuria didžiulę duomenų bazę, kurioje paprastai saugomos ne tik specifinės akcijos ar obligacijos kaina, bet ir apimtis, data, prekiautojų tipai. Pažymėtina, kad tokius, dažniausiai per dieną gautus duomenis leidžia tirti šiuo metu sparčiai besiplėtojanti aukšto dažnio duomenų analizė.

Rinkos ekonomikos finansų struktūrą sudaro vertybinių popierių rinka, bankai, draudimo įmonės ir kitos institucijos. Finansų rinka šioje struktūroje užima pagrindinę vietą, o kitos institucijos yra tik tarpininkės. Bendrovės, finansų rinkose platindamos savo akcijas, įgyja kapitalą gamybai plėsti, o vartotojai investuoja savo lėšas į bendrovių akcijas siekdami pelno. Taip visi rinkos dalyviai, t. y. vartotojai ir gamintojai, sprendžia svarbiausią rinkos ekonomikos uždavinį – optimaliai paskirstyti turimus išteklius. Kartu paplitusi nuomonė, jog apie šalies ekonomikos būklę galima spręsti pagal finansų rinkos elgseną. Pavyzdžiui, manoma, kad, pradėjus kristi akcijų kainoms, galima tikėtis ekonomikos sąstingio. Ir atvirkščiai, kylančios akcijų kainos yra galimo ekonomikos augimo požymis. Ar tai reiškia, kad finansų rinka tiesiogiai veikia ekonomiką? Labai mažai požymių patvirtina tokią nuomonę. Kur kas daugiau yra požymių, liudijančių tai, kad finansų rinka paprasčiausiai parodo žmonių nuomonę apie šalies ekonomikos elgseną artimiausioje ateityje. Tokiais „veidrodžiais“ paprastai yra laikomi įvairių šalių finansų rinkų indeksai: *Dow Jones Industrial Average (DJIA), Standard and Poor's (S&P), NASDAQ, NIKKEI225, DAX* ir kt., o Lietuvoje – Litin, Litin-10, Litin-G.

Tarp minėtų akademinių rinkos tyrimo motyvų – pelno siekimui paprastai tenka nepaskutinė vieta. Pateiksime tokį iškalbingą pavyzdį. 1926 m. sausį investavę 1 JAV dolerį į 1 mėn. JAV iždo vekselius, vieną iš saugiausių vertybinių popierių pasaulyje, ir kas mėnesį gautą pelną perinvestavę, 1996 m. gruodį būtumėte gavę 14 JAV dolerių pelno. Jei tą patį 1 JAV dolerį tokiu pačiu būdu būtumėte investavę į *S&P* indeksą, t. y. gerokai rizikingesnių vertybinių popierių portfelį, po 71 metų jūsų pelnas būtų 1 370 JAV dolerių. Tarkime, kad kiekvieną mėnesį sugebate iš anksto atspėti, kuri iš šių dviejų investicijų tą mėnesį duos didesnę grąžą. Koks būtų pelnas, jei, pasinaudoję šia informacija, kiekvieną mėnesį būtumėte investavę į didesnę grąžą duodančią investiciją? Šio pavyzdžio autoriaus R. Merton atsakymas: daugiau kaip 2 mlrd. JAV dolerių, tiksliau – 2 296 183 456 JAV doleriai! Nors tokia tobula prognozė neįmanoma, tačiau šis pavyzdys rodo, kad ir menkas gebėjimas prognozuoti gali duoti nemenką pelną.

Jeigu finansų rinka būtų panaši į prekių rinką, tai galima būtų tikėtis ir kainos susidarymo mechanizmo panašumų. Vartojimo prekių rinkoje, didėjant prekės kainai, norinčiųjų ją pirkti mažėja, o kainai krintant, priešingai – didėja. Tokia prekių rinkos dalyvio reakcija į kintančią kainą yra lemianti nusakant kainos susidarymo mechanizmą, vadinamą pasiūlos ir paklausos balansu. Teoriškai šis kainos susidarymo mechanizmas aprašomas *Arrow–Debreu–McKenzie* bendrosios pusiausvyros modeliu (Debreu, 1959). O finansų rinkos dalyvio reakcija į kintančią kainą yra priešinga: labiau pageidautina yra ta prekė akcija, kurios kaina kyla, ir paprastai neperkama ta prekė akcija, kurios kaina krinta. Nepaisant šių paviršutinių skirtumų, galima brėžti pasiūlos ir paklausos kreives tarp akcijų kiekio ir jų kainos. Tačiau šie pasiūlos ir paklausos santykiai neparodo esminių finansų rinkos bruožų (Ross, 1987). Todėl natūralu, kad finansų rinkos kainos susidarymo mechanizmą aprašančios teorijos skiriasi nuo bendrosios ekonominės pusiausvyros teorijos. Aiškiai pirmenybę turi modernioji finansų rinkos teorija, kainos susidarymo mechanizmą siejanti su tinkamu informacijos įtraukimu į kainą.

1. Efektyviosios rinkos hipotezė

Moderniosios finansų rinkos teorijos ištakos glūdi XX a. pradžios mokslininkų darbuose mėginant paaiškinti keistą finansų rinkos kainų elgeseną lyginant su tuo, kas buvo stebima prekių rinkose. Jei finansų rinkos kainas taip pat nustatytų „pasiūlos ir paklausos jėgos“, tai akcijos kaina turėtų tam tikra kryptimi kisti pusiausvyros link, o ne chaotiškai svyruoti. Tačiau empiriniai akcijų kainų pokyčių tyrimai rodė ką kita.

Akcijų kainų svyravimų šiuolaikinio aiškinimo prototipą pasiūlė prancūzų matematikas Louis Bachelier* (1870–1946). Jis 1900 m. Sorbonos universitete šia tema apgynė disertaciją „Spekuliacijos teorija“ *(Théorie de la spéculation)*. L. Bachelier (1900) spekuliacijos teorija yra tai, kas dabar suprantama kaip pasirinkimo sandorio įkainojimo teorija, apie kurią plačiau bus rašoma R. Leipaus ir R. Norvaišos (2004) straipsnio „Finansų rinkos teorijų taikymas“ skirsnyje „Finansų inžinerija“. Svarbiausias L. Bachelier darbo nuopelnas yra iš esmės naujas siūlymas matematiškai modeliuoti akcijos kainos kitimą. Tiksliau, tarkime, kad Δ yra teigiamas laiko intervalas ir tegul $S^{\Delta}(k\Delta)$ žymi kainas laiko momentais $k\Delta$ (k = 1, 2, …). L. Bachelier pasiūlytas kainos pokyčių modelis pagrįstas prielaida, kuri šiuolaikinės matematikos kalba galėtų būti formuluojama taip:

$$S^{\Delta}(k\Delta) = S(0) + \xi_{\Delta} + \xi_{2\Delta} + \ldots + \xi_{k\Delta}, \quad k \geq 1,$$

čia: $S(0)$ – teigiamas skaičius; $\xi_{i\Delta}$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, įgyjantys reikšmes $\pm\sigma\sqrt{\Delta}$ su tikimybe 1/2.

Tokia kainos elgesena vadinama „atsitiktiniu klaidžiojimu“. L. Bachelier pabrėžė, kad, pažymėjus $k = [t/\Delta]$, $t > 0$ ir neaprėžtai mažinant laiko intervalą Δ, arba, kitaip tariant, perėjus prie ribos, kai $\Delta \to 0$ (tam tikra tikimybine prasme), turi egzistuoti toks (atsitiktinis) procesas W, kuris apibrėžia kainos procesą S:

$$S(t) = S(0) + \sigma W(t), \quad t \geq 0. \tag{1}$$

Matematiškai nepriekaištingą tokio proceso W egzistavimo įrodymą 1923 m. pateikė amerikiečių matematikas Norbert Wiener (1894–1969). Dėl to šis procesas vadinamas *Wiener* procesu (išsamiau apie tai rašysime kitame skyriuje).

Vėlesnius empirinio tyrimo šia kryptimi darbus atliko H. Working (1934), A. Cowles (1933) ir M. G. Kendall (1953). Kitaip negu L. Bachelier, šie autoriai spėjo, kad:

$$S^{\Delta}(k\Delta) = S(0)\exp\{\xi_{\Delta} + \xi_{2\Delta} + \ldots + \xi_{k\Delta}\}, \quad k \geq 1.$$

Kitaip sakant, nepriklausomų atsitiktinių dydžių elgsena būdinga logaritminėms santykinių pokyčių transformacijoms $\ln\{S(k\Delta) / S((k-1)\Delta)\}$, o ne tiesioginiams

*1996 m. įkurta *Bachelier* finansų draugija *(Bachelier Finance Society)*, kurios tikslas – finansų disciplinos plėtra, pagrįsta atsitiktinių procesų teorija, statistika ir matematika. Daugiau apie šią draugiją žr. internete adresu: http://www.stochastik.uni-freiburg.de/bfsweb/

kainos pokyčiams $S(k\Delta) - S((k-1)\Delta)$. Jei, kaip anksčiau, pereitume prie ribos, kai $\Delta \to 0$, tai gautume, kad kainos procesas S yra aprašomas tokia formule:

$$S(t) = S(0)\exp\{\sigma W(t)\}, \quad t \geq 0.$$

Apibendrindamas empirinius akcijų kainų pokyčių tyrimus, M. G. Kendall suformulavo tokius, jo nuomone, esminius klausimus: kas verčia rinkos kainas svyruoti ir kokie atsitiktiniai procesai adekvačiai aprašo kainos kitimą? Mėginant atsakyti į šiuos klausimus, pamažu išsirutuliojo efektyviosios rinkos paradigma, kuria ir pagrįstos šiame straipsnyje aptariamos pagrindinės finansų rinkų teorijos.

Kitos darbų kryptys buvo ir yra susijusios su tuo, kas vadinama technine ir fundamentaliąja analize, kurių svarbiausias tikslas – kainos prognozė. Tuo tikslu, atliekant techninę analizę, naudojama visa informacija, susijusi su akcijos kaina praeityje ir jų prekybos apimtimi. Tokios yra, pavyzdžiui, *Dow* teorija ir jos tęsinys – *Elliot* bangų teorija (žr. Prechter, 1999). Fundamentaliosios analizės esmę sudaro akcijos vertės samprata. J. B. Williams (1938) ir kiti mėgino pagrįsti požiūrį, pagal kurį akcijos kaina parodo jos vertę, o šios vertės dydis yra lygus diskontuotai tos akcijos visų galimų ateities dividendų sumai. Fundamentalistų požiūriu, kainos akcijų rinkoje svyruoja apie savo (fundamentaliąją) vertę.

1.1. Rinkos efektyvumas

Ilgą laiką buvo manoma, kad fundamentaliosios vertės ir atsitiktinio klaidžiojimo teorijos prieštarauja viena kitai, pavyzdžiui, kainų prognozavimo atžvilgiu. Šį principinį prieštaravimą išsprendė P. A. Samuelson (1965) ir B. Mandelbrot (1966) darbai. Be kita ko, P. A. Samuelson parodė, kad, atsitiktinio klaidžiojimo teorijoje akcijos grąžos pokyčių nepriklausomumo savybę pakeitus sąžiningojo lošimo sąlyga, akcijos kaina privalo sutapti su fundamentaliąja verte, bent jau tuo atveju, kai investuotojai yra neutralūs rizikai, t. y. jiems rūpi tik tikėtinos grąžos dydis. Be to, P. A. Samuelson ir B. Mandelbrot siekė pagrįsti tai, kad rinka veikia „deramai“, jei visa vieša informacija apie akcijas įtraukta į jų kainą.

Toliau plėtodamas efektyvumo sampratą, E. F. Fama (1970) rėmėsi tuo, kad kapitalo rinkos pagrindinis vaidmuo yra kapitalo nuosavybės perskirstymas. Rinka šį vaidmenį atlieka efektyviai, jei kainos padeda teisingai paskirstyti išteklius. Todėl efektyviosios rinkos hipotezę (ERH) jis apibrėžė trumpa nuostata – *rinka vadinama efektyvia, jei kainos „visiškai atskleidžia“ turimą informaciją.* Taigi finansų teorijos terminas „efektyvus“ reiškia, kad rinkoje esanti informacija visapusiškai panaudojama akcijų kainoms sudaryti. Pati ERH ir jos išvados yra per daug bendros, kad jas galima būtų empiriškai patikrinti. Todėl įprasta, kad ERH papildoma kuriuo nors konkrečiu kainos susidarymo mechanizmo variantu. Tokiu atveju neigiami empirinio tikrinimo rezultatai gali būti aiškinami kaip pasirinkto kainos susidarymo mechanizmo atmetimas. Paprasčiausias toks mechanizmas grindžiamas vadinamąja sąžiningojo lošimo hipoteze, kurią apibrėšime kitame skirsnyje. Visų tokių mechanizmų bendras bruožas yra tas, kad dabarties kaina projektuojama pagal ateities kainas, kurios savo ruožtu susidaro rinkoje, remiantis visa jai prieinama informacija. Taip sudaromos kainos vadinamos *pusiausvyros* kainomis.

Jau minėjome, kad ERH susieja finansų rinkos teorinį modelį su realia rinka ir šia prasme ji atlieka labai svarbų metodologinį vaidmenį. Jei dėl kokių nors priežasčių galima manyti, kad konkreti finansų rinka yra efektyvi, tai, patikrinus papildomas sąlygas (jei tokios yra), jai galima būtų taikyti visus moderniosios finansų rinkos teorijos teiginius. Kita labai dažnai minima ERH išvada teigia, kad efektyviojoje rinkoje kiekviena šiai rinkai prieinama informacija negali būti panaudota siekiant didesnio pelno nei to, kuris yra numatomas sudarant pusiausvyros kainas. Taigi pelningai gali būti panaudota tik tokia informacija, kuri nėra „visiškai atskleista“ akcijos kainoje. Toks informacijos vaidmuo finansų rinkoje kartais lyginamas su gamybos efektyvumu prekių rinkoje, todėl ERH svarba vertinama panašiai kaip ir bendrosios ekonominės pusiausvyros svarba prekių rinkoje (Le Roy, 1989).

1.2. Teorinis ERH pagrindimas

ERH teisingumui pagrįsti remiamasi keletu teorinių argumentų. Paprasčiausias iš jų yra teiginys, kad visi rinkos veikėjai – investuotojai – yra racionalūs, todėl racionaliai įkainoja akcijas. Čia racionalumas reiškia du dalykus:

- rinkos veikėjai teisingai perima visą naują informaciją;
- sprendimus apie akcijų kainas rinkos veikėjai priima maksimizuodami savo naudingumo funkciją, aprašomą *von Neumann-Morgenstern* vidurkinės naudos teorija.

Jei visi rinkos veikėjai yra racionalūs, tai akcijų kainos išlaiko pusiausvyrą, t. y. rinka yra efektyvi. Tačiau prielaida, kad visi rinkos veikėjai – racionalūs, nėra būtina rinkos efektyvumui garantuoti. Kitas bendresnis teorinis argumentas yra prielaida, kad kai kurie rinkos veikėjai nėra racionalūs, o jų veiksmų įtaka akcijų kainoms yra atsitiktinė. Tai reiškia, kad iracionalių veikėjų veiksmai rinkoje „išsilygina“, jeigu jų yra daug ir visi jie veikia nepriklausomai. Todėl akcijų kainos tokioje rinkoje turėtų būti artimos pusiausvyros kainoms, o tai vėlgi rodo rinkos efektyvumą.

Dar bendresnis teorinis argumentas leidžia laikyti iracionalių rinkos veikėjų elgseną tarpusavyje priklausoma. Šio argumento pagrindą sudaro arbitražo sąvoka – vienas iš patraukliausių ir tikėtiniausių argumentų visoje ekonomikoje. Finansų ekonomikoje arbitražu vadinama tokia strategija, kuri leidžia nerizikuojant pasiekti teigiamą pelną (teorinio modelio atveju ši sąvoka apibrėžta (17) sąryšiu 3 skyriuje). Taigi, atsiradus nukrypimui nuo pusiausvyros kainos dėl iracionalių investuotojų veiksmų, racionalūs investuotojai be rizikos gali pasinaudoti kainų skirtumu ir gauti teigiamą pelną. Jei racionalūs investuotojai konkuruodami greitai panaikina arbitražo galimybę (kaip ir turi būti efektyviojoje rinkoje), tai kaina negali smarkiai ir ilgam nukrypti nuo pusiausvyros reikšmės, t. y.:

- jei rinka efektyvi, tai joje neegzistuoja arbitražo galimybė.

Kartais ERH tapatinama su arbitražo negalimumo akcijų rinkoje nuostata, kuri taip pat žinoma „nėra nemokamų pietų“ (žr. Ross, 1987; Rubinstein, 2001) vardu.

Savo straipsnyje S. A. Ross atskleidžia arbitražo sąvokos svarbą neoklasikinėje finansų teorijoje. Garsiajame ekonomikos vadovėlyje P. A. Samuelson cituoja pasakymą: netgi papūgą galima padaryti geru ekonomistu, nes tam pakanka išmokyti ją dviejų žodžių – „pasiūla“ ir „paklausa“. Pagal S. A. Ross, panašiai papūgą galima padaryti geru finansininku, nes tam pakanka ją išmokyti dviejų žodžių – „arbitražas neegzistuoja“. O jeigu rimtai, tai galima tikėtis papildomų problemų mėginant akademiniame žurnale išspausdinti straipsnį, kuriame nagrinėjamas arbitražo galimybe pagrįstas finansų rinkos modelis.

1.3. Empiriniai ERH testai

Empirinis ERH pagrindimas iki šiol „išgyveno“ du skirtingus laikotarpius: iki aštuntojo dešimtmečio pabaigos, kai daugumos tyrimų rezultatai patvirtino ERH, ir po to – neigiamų tyrimų rezultatų antplūdis. Didžiausio pakilimo nuotaiką gerai parodo tokia 1978 m. išsakyta M. Jensen (1978, p. 95) nuomonė: „ekonomikoje nėra kito teiginio, kuris būtų taip solidžiai empiriškai pagrįstas, kaip efektyviosios rinkos hipotezė“. Antro laikotarpio kategoriškų teiginių pavyzdžiu galėtų būti R. A. Haugen (1999) veikalas.

ERH empirinė analizė reiškia jos išvadų empirinį tikrinimą. Dažniausiai nagrinėjamos dvi išvadų rūšys. Pirma, pasirodžius naujai informacijai, akcijos kaina privalo reaguoti ir parodyti šią naujieną greitai ir teisingai. Antra, kadangi akcijos kaina turi sutapti su jos fundamentaliąja verte, tai kaina negali svyruoti, jeigu nėra naujos informacijos, susijusios su akcijos verte. Siekiant paneigti šias išvadas, pakaktų parodyti, pavyzdžiui, jog tam tikrą laiką galima gauti didesnį negu vidutinį pelną naudojantis pasenusia informacija. Šiuo atveju, vertinant rezultatus, didžiausia problema yra pelno dydžio įvertinimas, kadangi taikoma strategija visada susijusi su tam tikra rizika. Rizikai įvertinti savo ruožtu reikia papildomų prielaidų, o gautas pelnas gali būti vertinamas kaip užmokestis už riziką. Šiek tiek paprasčiau yra su informacijos samprata. E. F. Fama (1970) įvardijo tris galimus informacijos šaltinius ir kartu išskyrė tris efektyviosios rinkos hipotezės formas:

- silpna forma: dabarties kainos parodo visą informaciją apie praeities kainas ir akcijų pirkimo–pardavimo apimtį;
- pusiau stipri forma: dabarties kainos parodo visą dabarties momentu prieinamą viešą informaciją;
- stipri forma: dabarties kainos parodo visą dabarties momentu prieinamą informaciją, taip pat ir viešai neskleistiną informaciją *(insider information)*.

Jei finansų rinkai būdinga silpna ERH forma, tai prognozuoti ateities kainas, remiantis informacija tik apie praeities kainas ir akcijų pirkimų–pardavimų apimtį, neįmanoma. Kitaip tariant, jei teisinga silpna ERH, tai techninės analizės taikymas kainų prognozei yra neperspektyvus. Tą patį galima pasakyti ir apie fundamentaliąją analizę; jei rinkai būdinga pusiau stipri ERH forma, t. y. taikant strategiją, pagrįstą tik viešąja informacija, nėra pagrindo tikėtis nuolatinio didesnio nei vidutinio rinkos pelno, o stiprios ERH formos atveju nepadės net ir viešai neskleistina informacija. Šios išvados taip pat rodo visuomenėje vyraujančio mito klaidingumą, kad finansų matematika gali padėti rasti būdų didinti pelną. Tikroji finansų mokslo visuomenės pozicija yra priešinga. Geriausiu atveju, ką galima daryti, tai ieškoti būdų, kaip apsidrausti nuo galimų nuostolių arba, kalbant finansų inžinerijos žargonu, „konstruoti hedžingą“ *(hedging)*. Vienas iš tokių būdų yra labai paplitęs – tai pasyvus investavimas mėginant kurti tokį akcijų portfelį, kuris imituotų rinką. Tai ir daro vadinamieji indeksų fondai.

Darbų, susijusių su empiriniu ir teoriniu ERH pagrindimu, yra labai daug ir, be abejo, šis klausimas nėra galutinai išspręstas. Keletas atvejų šia tema yra paminėti straipsnio pabaigoje kalbant apie alternatyvias finansų rinkos teorijas. Čia atkreipsime dėmesį tik į vieną pastebėjimą, aptariamą daugelyje straipsnių (žr. Bowman, Buchanan, 1995). Dauguma finansų rinkos teoretikų teigia, kad ši rinka yra efektyvi, o daugumos praktikuojančių investuotojų pozicija yra priešinga ERH nuostatai. Viena vertus, investuotojai geriausiu atveju sprendimus grindžia technine ir (arba) fundamentaliąja analize, o neretai pasitelkia ir astrologiją, psichologiją, numerologiją ir pan. Kita vertus, minėtų R. G. Bowman ir J. Buchanan nuomone, būtų įdomu pamėginti atsakyti į klausimą – kodėl galima manyti, kad finansų mokslo visuomenė tiki ERH net ir tuo atveju, kai ji galbūt nėra teisinga? Iš esmės panašų klausimą nagrinėja G. M. Frankfurter ir E. G. McGoun (1999) tirdami ideologijos įtaką finansų ekonomikos teorijai.

Tolesniuose skyriuose apžvelgsime pagrindinius finansų matematikos teiginius mėgindami susieti juos su ERH, o tiksliau – su jos pagrindiniu variantu, pagal kurį efektyviojoje rinkoje arbitražas yra negalimas. Pradėsime nuo svarbaus dalyko – matematinio modelio sampratos.

2. Finansų rinkos modelis: samprata ir pavyzdžiai

Finansų rinkos atžvilgiu modelio sąvokai suteikiama konkreti prasmė. Būtent finansų rinkos modeliu vadiname matematinę teoriją, kurios elementai ir teiginiai aiškinami imituojant realias finansų rinkas. Vienas iš pagrindinių skirtumų tarp abstrakčios matematinės teorijos ir finansų rinkos modelio yra rezultatų vertinimo kriterijai. Matematinė teorija dažniausiai vertinama pagal savo vidinę darną ir logiką, o finansų rinkos modeliui taikomas toks išorinis vertinimo kriterijus kaip ekonominės intuicijos (ekonomikos metodologija) ir realios tikrovės (ekonometrinė analizė) atitikimas. Šia prasme finansų rinkos modelis yra vadinamosios motyvuotosios matematikos pavyzdys – terminas, kurį vartojo J.-P. Aubin (1984, žr. knygos epilogą) kalbėdamas apie bendrosios ekonominės pusiausvyros teoriją.

2.1. Akcijos kaina ir grąža

Kitas labai svarbus matematikos vaidmuo yra jos atliekama kalbos funkcija. Matematinis samprotavimas nuo nematematinio skiriasi dar ir tuo, kad kalbos objektai suvokiami vienareikšmiškai, remiantis tik tomis jų savybėmis, kurios yra priskirtos pagal apibrėžimą. Pavyzdžiui, finansų rinkos teorijoje labai svarbūs tokie realybės aspektai kaip ateities neapibrėžtis, laikas, atsitiktiniai įvykiai, akcijos kaina ir pan. Finansų rinkos modelyje, taikant matematinę tikimybių teoriją, šiems terminams suteikiama labai konkreti prasmė. Tam, kad galėtume naudotis šia teorija, privaloma *tarti*, kad yra žinoma tikimybinė erdvė, t. y. aibė Ω ir funkcija P, apibrėžta tam tikros šios aibės poaibių klasėje $\mathcal{F}$*, įgyjanti reikšmes intervale $[0, 1]$. Aibę Ω sudaro tiesiogiai su ekonominiu modeliu susiję pasaulio ateities scenarijai ω, kartais tiesiog vadinami būsenomis. Kiekvienas šeimos $\mathcal{F}$ elementas A suprantamas kaip tokia ateities scenarijų aibė, apie kurią galime pasakyti, kad ji įvyks su tikimybe $P(A)$. Taigi tarus, kad mums yra žinoma tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, akcijos kainos reikšmė natūraliai priklauso nuo būsenos $\omega \in \Omega$ ir laiko. Laikas finansų teorijoje paprastai sutapatinamas arba su diskrečia aibe $D = \{0, 1, \ldots, T\}$, arba su intervalu $D = [0, T]$, juos atitinkančios teorijos vadinamos diskretaus arba tolydaus laiko finansų rinkos modeliu. Dažniausiai aibės D elementas $t = 0$ žymi dabarties laiko momentą, o kiekvienas elementas $t > 0$ priklauso ateičiai. Diskrečios laiko aibės elementus galima aiškinti įvairiai, pavyzdžiui, tai gali būti metai, mėnesiai ar valandos.

Akcijos kaina – tai dviejų kintamųjų funkcija $S = \{S(t, \omega) : (t, \omega) \in D \times \Omega\}$, kurios reikšmės yra neneigiami realūs skaičiai. Labai dažnai antrasis argumentas ω praleidžiamas, nes teiginiai apie $S(t) \equiv S(t, \omega)$ paprastai nepriklauso nuo konkrečios ω reikšmės. Tokia funkcija vadinama atsitiktiniu procesu, jei išpildomas vadinamasis matumo kriterijus**. Šis kriterijus rodo, kad yra žinomos tam tikros klasės įvykių tikimybės. Toliau funkciją S vadinsime akcijos kaina arba kainos procesu nepriklausomai nuo to, kuris modelis – diskretaus ar tolydaus laiko – turimas galvoje.

Nagrinėjant daugelį finansų rinkos teorijos klausimų, ekonomiškai pagrįstesniais laikomi ne absoliutūs, bet santykiniai kainos pokyčiai. Dėl šios priežasties sudarant finansų rinkos modelius vartotinas ne tik kainos, bet ir grąžos terminas. Tarkime, S yra diskretaus laiko akcijos kainos procesas. Akcijos grąža arba grąžos procesu vadinsime funkciją $R = \{R(t) : t = 0, 1, \ldots, T\}$, apibrėžtą taip: $R(0) := 0$, ir

$$R(t) - R(t-1) := \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)}, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{2}$$

Čia tariama, kad $S(t-1) > 0$ su visais t. Kadangi diskretaus laiko modeliuose laiko intervalas yra fiksuotas ir lygus 1 (jo interpretacija gali būti įvairi), tai dažnai skirtumui $R(t) - R(t-1)$, vadinamam grąžos norma *(rate of return)*, taikomas žymėjimas $R(t)$. Tolydaus laiko modeliuose laiko intervalo ilgiai yra kintami, todėl toks žymėjimas, kuris nerodo intervalo pradžios ir pabaigos, nėra geras. Dar viena grąžos samprata, vartojama ekonometrinėje analizėje, gaunama dešinę (2) lygybės pusę pakeitus funkcija $\ln\{S(t) / S(t-1)\}$.

Taigi, žinant akcijos kainą S, jos grąža R nusakoma (2) formule. Ir atvirkščiai, žinant akcijos grąžą R, iš tos pačios formulės nesunku gauti jos kainos proceso išraišką:

*$\mathcal{F}$ yra tokia aibės Ω poaibių klasė, kuri yra uždara aibių papildymo, baigtinės sankirtos ir skaitaus jungimo operacijų atžvilgiu. Tikimybių teorijoje tokia klasė vadinama σ-algebra.

**Matumas rodo, kad įvykis $\{\omega : S(t, \omega) \in B\}$ priklauso šeimai $\mathcal{F}$ su kiekvienu $t \in D$ ir su kiekvienu pustiesės $[0, \infty)$ *Borel* poaibių σ-algebros elementu B.

$$S(t)=S(0)\prod_{s=1}^{t}\left[1+R(s)-R(s-1)\right],\ \ t=1,...,T, \tag{3}$$

kur $S(0)$ – laisvai pasirinktas teigiamas skaičius, pavyzdžiui, $S(0) = 1$, o pokytis $R(t) - R(t-1) > -1$ su visais t. (2) ir (3) sąryšiais nusakoma abipusė vienareikšmė S ir R atitiktis:

$$S(t)=S(0)+\sum_{s=1}^{t}S(s-1)\left[R(s)-R(s-1)\right],\ \ t=1,...,T.$$

Aptarę akcijos kainos ir grąžos matematinę sampratą, toliau galime konkrečiau apibūdinti vieną kainos susidarymo mechanizmo variantų – sąžininingojo lošimo rinką.

2.2. Sąžiningojo lošimo rinka

Vienas iš pirmųjų akcijos kainos mechanizmų aiškinimų galimas pasitelkiant analogiją su nuosekliai kartojamų lošimų seka. Tariama, kad lošimai yra sąžiningi ta prasme, kad kiekvienu laiko momentu žinant ankstesniųjų n lošimų rezultatus, $(n + 1)$ lošimo tikėtinas laimėjimas yra toks pat kaip ir n lošimo laimėjimas. Kartojamo sąžiningojo lošimo rezultatai tikimybių teorijoje modeliuojami vadinamuoju martingalu*. Sakykime, kad $X_1, X_2, \ldots$ yra atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir turintys baigtinius vidurkius $EX_1, EX_2, \ldots$ Tarkime, kad $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ yra nemažėjanti tam tikrų įvykių aibių (σ-algebros) seka, toliau vadinama informaciniu srautu. Seka $\{X_n : n \geq 1\}$ vadinama martingalu, jei su kiekvienu $n \geq 1$, P beveik visada teisinga lygybė:

$$E\left[X_{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right]=X_n. \tag{4}$$

Kairėje pusėje esantis reiškinys yra X_{n+1} sąlyginis vidurkis atžvilgiu $\mathcal{F}_n$. Jei X_n yra n lošimo rezultatas ir $\mathcal{F}_n$ yra pirmųjų n lošimų visus galimus rezultatus nusakantys įvykiai, (4) sąryšis išreiškia tai, kad, žinant pirmųjų n lošimų rezultatus, $(n + 1)$ lošimo tikėtinas laimėjimas nesiskiria nuo n lošimo laimėjimo.

Kaip ir anksčiau, tarkime, kad yra žinoma tikimybinė erdvė $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, apibrėžianti finansų rinkos modeliui svarbius ateities scenarijus ir jų tikimybes. Taip pat tarkime, kad visa t laiko momentu prieinama rinkos informacija yra nusakoma aibe $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, o šeima $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t : t = 0, 1, \ldots, T\}$ sudaro informacinį srautą. Sakykime, kad akcijos grąžos procesui R galioja sąžiningojo lošimo hipotezė *(fair game)*, jei su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$ teisinga tokia lygybė:

$$R(t) = R(t-1) + \mu + \xi_t, \tag{5}$$

kur μ – realusis skaičius, o ξ_t – martingalinių skirtumų seka atžvilgiu informacijos srauto $\mathbb{F}$, t. y. $E\left[X_t\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]=0$ su kiekvienu t. Aišku, kad akcijos grąžos procesui R galioja sąžiningojo lošimo hipotezė, jei (5) sąlygoje ξ_t yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir dispersija σ^2. Tuo atveju sakoma, kad akcijos grąžos procesui R galioja atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė.

Sąžiningojo lošimo hipotezė papildo efektyviosios rinkos hipotezę ir abi kartu sudaro vieną iš galimų kainos susidarymo mechanizmų. Iš tikrųjų tegul S yra akcijos kainos procesas, o jos grąžos procesui R galioja (5) lygybė. Remdamiesi (2) formule, gauname, kad su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$ galioja toks sąryšis:

$$\frac{E\left[S(t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{S(t-1)}-1=E\left[R(t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]-R(t-1)=\mu. \tag{6}$$

*„Martingalas“ yra daugelyje Europos šalių paplitęs senovinis žodis, turintis skirtingą kilmę ir reiškiantis kurią nors saugumo priemonę. Enciklopedinis anglų kalbos terminų žodynas (Webster's.., 1989) pateikia tokį aiškinimą: *martingale*, *mär'tingäl*; senoviško stiliaus kelnės; nuo žodžio *Martigal*, reiškiančio Martigo *(Martigues)* miestelio Provanse gyventoją; surišimas, nuo arklio galvos iki balno pavaržos po pilvu ir toliau einantis per priekines kojas, siekiant apsaugoti arklį nuo galvos kėlimo; *jūr.* trumpas statmenas skersinis po bušpritu.

Vadinasi, su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$ teisinga ir tokia lygybė:

$$S(t-1) = E\left[S(t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] / (1+\mu). \tag{7}$$

Taip apibrėžtas akcijos kainos procesas S yra pusiausvyros kainos proceso pavyzdys, kadangi $S(t-1)$ „visapusiškai atskleidžia" rinkos informaciją, aprašomą aibe $\mathcal{F}_{t-1}$. Kartais (7) sąryšis vadinamas analitine ERH forma.

Remiantis analitine ERH forma, su papildomomis sąlygomis galima parašyti akcijos fundamentaliosios vertės formulę. Tarkime, kad akcijos kainos S kitimas nusakytas su visais $t = 0, 1, \ldots$, o t laiko momentu išmokamų dividendų dydis yra $D(t)$ (dėl paprastumo iki šiol dividendai buvo laikomi akcijos kainos dalimi). Tokiu atveju akcijos grąža $R = \{R(t) : t = 0, 1, \ldots\}$ apibrėžiama taip: $R(0) := 0$ ir

$$R(t) - R(t-1) := \frac{S(t) - S(t-1) + D(t)}{S(t-1)}, \quad t = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

čia tariama, kad $S(t-1) > 0$ su visais t, o analitinė ERH forma yra

$$S(t-1) = E\left[S(t) + D(t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] / (1+\mu)$$

su kiekvienu $t = 1, 2, \ldots$ Taikydami šį sąryšį n kartų ir matematinę rekursiją, gauname, kad

$$S(t-1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{E\left[D(t+k-1)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{(1+\mu)^k} + \frac{E\left[S(t+n-1)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]}{(1+\mu)^n} \tag{9}$$

su kiekvienu $t = 1, 2, \ldots$ Dabar tarkime, kad galioja vadinamoji transversalumo sąlyga: (9) lygybės dešinėje esantis antrasis narys artėja į 0, kai n neaprėžtai didėja. Tada (9) lygybėje su $n \to \infty$ gauname, kad kiekvienam $t = 1, 2, \ldots$ galioja tokia lygybė:

$$S(t-1) = E\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D(t+k-1)}{(1+\mu)^k} \middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]. \tag{10}$$

Ši akcijos kaina, toliau žymima $\overline{S}$, vadinama fundamentaliąja verte *(fundamental value)*. Jei akcijos kaina S atitinka fundamentaliąją vertę, t. y. jei $S = \overline{S}$, tai nesunku patikrinti, kad atitinkamam grąžos procesui (8) galioja sąžiningojo lošimo hipotezė. Vadinasi, pagal ERH, fundamentalioji vertė yra pusiausvyros kaina, „visapusiškai atskleidžianti" turimą informaciją. Jei akcijos kaina skiriasi nuo savo fundamentaliosios vertės, tai sakoma, kad tokia akcija sukuria finansinį burbulą *(financial bubble)*. Pagal tokią finansinio burbulo sampratą, jis gali egzistuoti ir efektyviojoje rinkoje, nusakomoje analitine ERH forma (daugiau apie tai rašoma paskutiniame apžvalgos „Finansų rinkos teorijų taikymas" skyriuje).

Ar teisinga, kad efektyviojoje rinkoje akcijos grąžos procesui galioja sąžiningojo lošimo hipotezė ar kuris nors atsitiktinio klaidžiojimo hipotezės variantas? Nesuklysime sakydami, kad ši problema šalia ERH pagrindimo yra viena iš svarbiausių moderniojoje finansų rinkos teorijoje. Ji taip pat susijusi su kitu klausimu – ar akcijos kainos yra numatomos? Jei taip, tai akcijos grąžos procesui negali būti teisinga sąžiningojo lošimo hipotezė. Vienareikšmio atsakymo į visus šiuos klausimus vargu ar galima tikėtis. Pacituosime tik seniai šioje srityje dirbančių mokslininkų A. W. Lo ir A. C. MacKinlay (1999, p. 4) nuomonę: „finansų rinkos tam tikru mastu yra numatomos, bet tai toli gražu nėra rinkos neefektyvumo ar iracionalumo požymis, <...>". Bendros nuomonės šiuo klausimu tarp ekonomistų nėra iki šiol.

Pažymėsime, kad įvairių akcijų atsitiktiniai dydžiai ξ_t ir realusis skaičius μ apibrėžiant sąžiningojo lošimo hipotezę gali būti nevienodi. Toliau sakykime, kad rinka yra sąžiningojo lošimo rinka, jei realusis skaičius μ visoms šios rinkos akcijoms yra vienodas. Tarkime, kad sąžiningojo lošimo rinkoje yra akcija, turinti grąžos normą $\widetilde{R}_0(t) = \mu$ su kiekvienu t, t. y. (5) sąlyga galioja, kai $\xi_t \equiv 0$ su kiekvienu t. Remiantis (3) formule, tokios akcijos kainos procesas yra $S_0(t) := S_0(0)(1 + \mu)^t$ su visais t. Toks vertybinis popierius vadinamas nerizikingu. O kaina S, apibrėžta (7) lygybe, nusako rizikingą akciją, nes jos grąža R yra atsitiktinis procesas. Tačiau šios akcijos tikėtina grąžos norma *(expected rate of return)* $E\left[\widetilde{R}(t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]$ lygi konstantai μ su kiekvienu t. Rinkos veikėjas vadinamas neutraliu rizikai, jei investuojant jam rūpi tik tikėtinos grąžos norma, o ne akcijos rizikingumas. Kadangi akcijų S_0 ir S tikėtinos grąžos normos sutampa, tai tokiam rinkos veikėjui jos yra lygiavertės. Taigi sąžiningojo lošimo rinkoje rizikai neutraliems investuotojams nėra prasmės investuoti į rizikingas akcijas.

Kaip rodo (7) pavyzdys, sąžiningojo lošimo rinkoje akcijos kaina neprivalo atitikti martingalo sąlygų, tačiau kiekviena diskontuota kaina

$$\{S(t)/S_0(t) : t = 0, 1, ..., T\} \text{ yra martingalas atžvilgiu } (\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F}), \qquad (11)$$

kur, kaip ir anksčiau, $S_0(t) = S_0(0)(1 + \mu)^t$. Iš tikrųjų, remiantis (7) pavyzdžiu, su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$, teisinga tokia lygybė:

$$E\left(S(t)/(1+\mu)^t \middle| \mathcal{F}_{t-1}\right) = S(t-1)/(1+\mu)^{t-1}.$$

Tai rodo, kad (11) lygybė galioja. Kitame skyriuje dėstoma, kad sąžiningojo lošimo rinka ne tik efektyvi, bet ir joje nėra arbitražo galimybės.

Diskretaus laiko finansų rinkos modelių nepakanka, kai reikia tiksliau modeliuoti greitai kintančias kainas. Mat, mažėjant intervalams, diskrečiam modeliui pritaikytas matematinis aparatas tampa per daug gremėzdiškas. Tokiu atveju paprasta išeitis – taikyti abstraktesnį matematinį aparatą, kuris leistų nagrinėti akcijų kitimą visame laiko intervale $[0, T]$. Dar vienas diskretaus laiko finansų rinkos modelių trūkumas yra aptartas straipsnio „Finansų rinkos teorijų taikymas“ skyriuje apie finansų ekonometriją. Svarbiausi yra finansų teorijos teiginiai, kuriuos pavyksta įrodyti toliau nagrinėjamais tolydaus laiko finansų rinkos modeliais.

2.3. Tolydaus laiko modelis: geometrinis *Wiener* procesas

Tolydaus laiko atveju problemos prasideda jau tada, kai norime apibrėžti tokius akcijos kainos ir grąžos procesus, kuriems būtų būdingos anksčiau minėtos savybės kiekviename intervalo $[0, T]$ skaidinyje $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$. Be to, pereinant nuo vieno skaidinio prie kito, tos savybės turi būti tam tikru būdu suderintos. Toks savybių suderinamumo reikalavimas įtrauktas į *Wiener* proceso apibrėžimą. Sakoma, kad tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ apibrėžtas atsitiktinis procesas $W = \{W(t) : t \geq 0\}$ yra *Wiener* procesas (arba *Brown* judesys), jei:

- $W(0) = 0$ ir su visais $0 \leq s < t < \infty$, $W(t) - W(s)$ yra standartinis normalusis atsitiktinis dydis su nuliniu vidurkiu ir dispersija $t - s$;
- pokyčiai $W(t_1) - W(s_1), \ldots, W(t_n) - W(s_n)$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai kiekvienam $0 \leq s_1 < t_1 \leq \ldots \leq s_n < t_n < \infty$;
- proceso trajektorijos $W(\cdot, \omega)$ yra tolydžiosios funkcijos beveik su visais $\omega \in \Omega$.

Klausimas, ar toks procesas egzistuoja, – visiškai nebanalus. Matematiškai nepriekaištingą jo egzistavimo įrodymą pirmą kartą pateikė N. Wiener (1923). Kaip jau minėjome straipsnio antrame skyriuje, iš esmės panašią matematinę išraišką taikė L. Bachelier savo 1900 m. darbe. Apibrėžime išvardytos *Wiener* proceso savybės yra esminės – jos būtinos siekiant apibrėžti atsitiktinį procesą vieninteliu būdu. Iš šio apibrėžimo išplaukia ir kitos savybės. Pavyzdžiui, *Wiener* proceso trajektorijos yra ne tik tolydžios, bet ir su kiekvienu $\alpha < 1/2$ joms galioja vadinamoji α-*Hölder* savybė, t. y. su kiekvienu $0 < T < \infty$ ir beveik su visais $\omega \in \Omega$ egzistuoja tokia baigtinė konstanta $K = K(\alpha, T, \omega)$, kad $|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \le K|t-s|^{\alpha}$ su visais $t, s \in [0, T]$. Be to, ši savybė nėra teisinga su $\alpha = 1/2$.

Toliau *Wiener* procesas bus taikomas apibrėžiant tolydaus laiko akcijos ir grąžos kainos procesus. Tegul W yra *Wiener* procesas, μ – realusis skaičius ir $\sigma > 0$. Apibrėžkime atsitiktinį procesą taip:

$$R(t) := \mu t + \sigma W(t),\ 0 \le t \le T. \tag{12}$$

Susiaurinus apibrėžimo sritį, $\{R(t) : t = 0, 1, \ldots, T\}$ yra diskretaus laiko akcijos grąžos procesas. Tokiam grąžos procesui teisinga atsitiktinio klaidžiojimo hipotezė, nes (5) lygybėje dydžiai $\xi_t = \sigma[W(t) - W(t-1)]$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai su nuliniu vidurkiu ir dispersija σ^2.

Diskretaus laiko atveju akcijos kaina ir grąža yra susietos (3) sąryšiu. Ar toks sąryšis gali būti apibendrintas tolydaus laiko procesams, toli gražu nėra paprastas klausimas. Konkrečiu atveju, jei $\sigma = 0$, t. y. jei tolydaus laiko akcijos grąžos procesas yra $R(t) = R_0(t) = \mu t$, tai atitinkamas akcijos kainos procesas finansų teorijoje apibrėžiamas gerai žinomu būdu skaičiuojant tolydžiąsias sudėtines palūkanas *(continuous compound interest)*. Būtent kiekvienam intervalo $[0, T]$ skaidiniui $\{iT/m\}_{i=0}^{m}$ suskaičiuojamos atitinkamos sudėtinės palūkanos ir po to, perėjus prie ribos, kai $m \to \infty$, gaunamas toks sąryšis:

$$S_0(T) := \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{m} \big(1 + R_0(iT/m) - R_0((i-1)T/m)\big) = \lim_{m\to\infty} (1 + \mu T/m)^m = e^{\mu T}. \tag{13}$$

Natūralu būtų tą patį skaičiavimo metodą taikyti ir kitoms grąžoms. Deja, ši riba gali neegzistuoti arba gali būti begalinė, jei vietoj R_0 yra laisvai pasirenkama funkcija. 1 priede parodyta, kad tolydžiąsias sudėtines palūkanas galima „skaičiuoti" tų funkcijų, kurios yra tam tikra prasme nešiurkštesnės už *Wiener* proceso trajektorijas.

Tarkime, kad akcijos grąža R yra (12) lygybe apibrėžtas atsitiktinis procesas. Tada 1 priede nagrinėta (28) lygybe apibrėžta akcijos kaina S taip pat yra atsitiktinis procesas:

$$S(t) = \exp\{\mu t + \sigma W(t) - (\sigma^2/2)t\}, \quad 0 \le t \le T. \tag{14}$$

Šis atsitiktinis procesas vadinamas geometriniu *Wiener* procesu, o jo apibrėžimas apibendrina tolydžiąsias sudėtines palūkanas pagal (13) formulę. 1 priede pateiktas šio proceso apibrėžimas nėra standartinis. Paprastai remiamasi stochastine analize, kurią atliekant pagal (14) formulę įvertintas geometrinis *Wiener* procesas yra tiesinės stochastinės diferencialinės lygties $dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t))$, $S(0) = 1$ sprendinys, t. y. 1 priedo (30) lygties sprendinys, kai integralas yra vadinamasis *Itô* stochastinis integralas, o akcijos grąža R apibrėžta (12) lygybe.

Tai, kad geometrinis *Wiener* procesas gali būti nusakomas remiantis (28) lygybe ir apibendrinant tolydžiąsias sudėtines palūkanas pagal (13) formulę, yra sąlyginai paprastas argumentas, kuriam nereikia stochastinės analizės žinių ir kuris pateisina *Wiener* proceso sąsają su akcijų kainos kitimo aprašymu. Mažiau tikslus, bet istoriškai susiklostęs pirmas argumentas pagrįstas jau minėtu pastebėjimu, kad investuotojams yra svarbesni kainos santykiniai, o ne absoliutūs pokyčiai. Pavyzdžiui, M. F. M. Osborne (1959) šią investuotojų savybę grindė psichologijoje žinomu *Weber-Fechner* dėsniu. Tam prieštaravęs P. A. Samuelson (1973, p. 14) manė, kad šios savybės priežastys yra tiek pačioje rinkoje, tiek ir tikimybių skaičiavimo logikoje.

2.4. Alternatyvūs grąžos procesai

Akcijos kainos procesui aprašyti taikomas geometrinis *Wiener* procesas patogus teorinėms išvadoms, tačiau turi nemažai trūkumų, susijusių su realios rinkos atitikimu. Daugelio finansų teoretikų, tarp kurių B. B. Mandelbrot (1997) yra vienas iš pirmųjų ir aktyviausių šios teorijos reiškėjų, nuomone, pagrindinės problemos susijusios su *Wiener* proceso vienmačio marginaliojo skirstinio uodegos lengvumu*, pokyčių nepriklausomumu ir trajektorijų tolydumu. Per pastaruosius kelis dešimtmečius kainų modeliavimui buvo išbandyti praktiškai visi žinomi atsitiktiniai procesai ir jų klasės. Čia paminėsime tik keletą alternatyvių atsitiktinių procesų, dažnai taikomų vietoj *Wiener* proceso. Pirmasis iš jų – simetrinis α-stabilusis procesas $X_\alpha = \{X_\alpha(t) : t \geq 0\}$, $\alpha \in (0, 2)$. Jo pokyčiai – nepriklausomi α-stabilūs atsitiktiniai dydžiai, vienmačiai marginalieji skirstiniai turi sunkias uodegas, o trajektorijos yra trūkios. Tarkime, kad akcijos grąžos procesas yra:

$$R(t) := \mu t + X_\alpha(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Taigi su kiekvienu $p \in (\alpha, 2)$, $v_p(X_\alpha(\cdot, \omega); [0, T]) < \infty$ (žr. (27) apibrėžimą) ir beveik su visais $\omega \in \Omega$ (26) sąryšiu apibrėžta tolydinė šio proceso kvadratinės λ-variacijos dalis $\left[X_\alpha(\cdot,\omega)\right]_\lambda^c \equiv 0$ yra su tais pačiais $\omega \in \Omega$. Todėl, remiantis (28) lygybe, atitinkamas akcijos kainos procesas yra:

$$S(t) = \exp\{\mu t + X_\alpha(t)\} \prod_{(0,t]} (1 + \Delta X_\alpha) e^{-\Delta X_\alpha}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Buvę populiarūs praėjusio amžiaus septintąjį ir aštuntąjį dešimtmečiais simetriniai α-stabilieji atsitiktiniai procesai šiais laikais yra gerokai rečiau taikomi akcijų grąžoms modeliuoti. Argumentuojama, kad jų uodegos yra per sunkios (neegzistuoja antras momentas), be to, jie neturi analizinės tankio išraiškos, galbūt yra ir kitos ne tokios racionalios priežastys. Paskutinį dešimtmetį finansų matematikoje ir ekonometrijoje išpopuliarėjo kelios kitos homogeniškų *Lévy*** procesų klasės. Priminsime, kad *Lévy* procesu vadinamas toks atsitiktinis procesas X su nepriklausomais pokyčiais $\{X(t) : t \geq 0\}$, kurio trajektorijos yra tolydžios iš dešinės, su trūkiais iš kairės ir $X(0) = 0$. *Lévy* procesas X vadinamas homogenišku, jei pokyčio $X(t + s) - X(t)$, $t, s \geq 0$ skirstinys nepriklauso nuo t. *Wiener* procesas yra vienintelis homogeniškas *Lévy* procesas, kurio trajektorijos yra tolydžios. Tarp minėtų populiarių procesų šiuo metu yra normalusis atvirkštinis *Gauss Lévy* procesas (Barndorff-Nielsen, 1998). Kita populiarių procesų klase, tinkama kainų kitimui modeliuoti, gali tapti apibendrintųjų z-skirstinių *Lévy* procesai, apibrėžti B. Grigelionio (2001).

Kita alternatyva *Wiener* procesui – trupmeninis *Brown* judesys $B_H = \{B_H(t) : t \geq 0\}$, priklausantis nuo vadinamojo *Hurst* rodiklio $H \in (1/2, 1)$. Kaip ir *Wiener* procesas, B_H yra *Gauss* atsitiktinis procesas su tolydžiomis trajektorijomis. Tačiau, kitaip negu *Wiener* procesas, B_H pokyčiai yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tarkime, kad akcijos grąžos procesas yra:

$$R(t) := \mu t + B_H(t),\ 0 \leq t \leq T.$$

Vėlgi su kiekvienu $p \in (1/H, 2)$, $v_p(B_H(\cdot, \omega); [0, T]) < \infty$ ir beveik su visais $\omega \in \Omega$ (26) sąryšiu apibrėžta tolydinė šio proceso kvadratinės λ-variacijos dalis yra 0. Be to, šio proceso trajektorijos yra tolydžios funkcijos, todėl, remiantis (28) lygybe, atitinkamas akcijos kainos procesas yra:

$$S(t) = \exp\{\mu t + B_H(t)\},\ 0 \leq t \leq T.$$

Beje, jeigu B_H atsitiktinio proceso *Hurst* indeksas yra $H \in (0, 1/2)$, tai jo kvadratinė λ-variacija yra begalinė, o tai yra proceso, kuriam tolydžių sudėtinių palūkanų skaičiavimo metodas nepritaikomas, pavyzdys.

*Atsitiktinio proceso $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ vienmatis marginalusis skirstinys yra atsitiktinio dydžio $X(t)$ skirstinys kiekvienam $t \geq 0$. Atsitiktinio dydžio ξ skirstinio *uodega* vadinama tokia funkcija: $f(u) := P(\{|\xi| \geq u\})$, $u \geq 0$. Uodega yra lengva, pusiau sunki arba sunki, jei didelių argumento reikšmių funkcija f kinta atitinkamai kaip funkcija $\exp\{-u^a\}$, $u^{\pm b}\exp\{-u\}$ arba u^{-a}, kiekvienam $0 < a, b < \infty$.

**Paul Lévy (1886–1971) – prancūzų matematikas.

3. Finansų matematika

Šiame skyriuje aprašysime vieną iš pagrindinių šiuolaikinės finansų rinkos teorijų – arbitražo teoriją, taip pat trumpai apžvelgsime kitą svarbią su optimaliu išteklių paskirstymu finansų rinkoje susijusią problemą – vadinamąją portfelio teoriją.

3.1. Arbitražo teorija

Svarbiausią šiuolaikinės finansų matematikos dalį sudaro arbitražo, rizikai neutralaus įkainojimo ir finansinių išmokų atkartojimo (arba replikavimo) teorija. Šios teorijos svarbą lemia tai, kad visos trys sąvokos susieja efektyviosios rinkos sampratą, vertybinių popierių įkainojimo mechanizmą ir „hedžingu“ (rizikos draudimu) grindžiamą finansinių priemonių įkainojimo metodą*. Ši teorija glaustai vadinama arbitražo teorija, jos atsiradimas siejamas su J. M. Harrison ir D. M. Kreps (1979) bei J. M. Harrison ir S. Pliska (1981) darbais.

Minėti trys arbitražo teorijos dalykai nusakomi atitinkamomis matematinėmis sąvokomis: bearbitražė rinka, ekvivalenčiu rizikai neutraliu matu ir pilnąja rinka. Jų konkretus apibrėžimas priklauso nuo finansų rinkos modelio. Arbitražo teorija turi daugiau ar mažiau baigtą pavidalą tik diskretaus laiko atveju – čia rinka yra bearbitražė tada ir tik tada, kai egzistuoja ekvivalentusis rizikai neutralus matas. Be to, bearbitražė rinka yra pilnoji tada ir tik tada, kai egzistuoja vienintelis ekvivalentusis rizikai neutralus matas. Šie du teiginiai sudaro tai, kas yra vadinama pirmąja ir antrąja fundamentaliomis vertybių įkainojimo teoremomis. Kol kas žinoma, kad šie teiginiai tolydaus laiko finansų rinkos modelių atžvilgiu yra nevisiškai teisingi ir galioja šiek tiek modifikavus visas tris minėtas matematines sąvokas. Todėl arbitražo teorija tolydaus laiko atveju vis dar kuriama.

Iš pradžių nagrinėkime diskretaus laiko finansų rinkos modelį, t. y. tarkime, kad rinkoje kainos keičiasi tik laiko momentais $t \in D := \{0, 1, \ldots, T\}$. Šiuo atveju su kiekvienu $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ akcijos kaina $S_k = \{S_k(t) : t \in D\}$ ir investuotojo turimas akcijų kiekis $\psi_k = \{\psi_k(t) : t \in D\}$ yra diskretaus laiko atsitiktiniai procesai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir suderinti su informacijos srautu $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in D\}$. Porą (S, P), kurioje $S := (S_0, S_1, \ldots, S_d)$, glaustai vadinsime vertybinių popierių rinka. Akcija S_0 laikoma nerizikinga, jei $S_0(t)$ yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matus ir $S_0(t) > 0$ su kiekvienu t. Atsitiktinis dydis $\psi_k(t)$, nusakantis k akcijų kiekį, laikomą investuotojo laikotarpiu nuo $t - 1$ iki t, yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matus su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$, o $\psi_k(1) \equiv \psi_k(0)$. Investavimo strategija vadinamas procesas $\psi = (\psi_0, \ldots, \psi_d)$, investuotojo portfeliu laiko momentu $t \in D$ – vektorius $\psi(t) = (\psi_0(t), \ldots, \psi_d(t))$, o investuotojo portfelio vertės procesu – atsitiktinis procesas $V = \{V(t) : t \in D\}$, apibrėžtas tokia lygybe:

$$V(t) := \sum_{k=0}^{d} \psi_k(t) S_k(t). \tag{15}$$

Investuotojo strategija ψ vadinama finansavimosi strategija *(self-financing strategy),* jei su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$:

$$V(t) = V(0) + \sum_{k=0}^{d} \sum_{s=1}^{t} \psi_k(s) \left[S_k(s) - S_k(s-1) \right]. \tag{16}$$

Ši finansavimosi strategijos savybė rodo, kad rinkoje nėra papildomų finansinių šaltinių ir finansinių lėšų vartojimo, sandoriai nekainuoja, o portfelio vertės pokytis priklauso tik nuo akcijų kainų pokyčių.

Sakysime, kad vertybinių popierių rinkoje (S, P) arbitražas neegzistuoja, arba rinka (S, P) yra bearbitražė, jei kiekvienai finansavimosi strategijai ψ ir ją atitinkančiam portfelio vertės procesui V teisingas toks sąryšis:

*Apie tokias finansines priemones, kaip pasirinkimo sandoris, ir jų įkainojimą rašoma šiai temai skirtame antrame R. Leipaus ir R. Norvaišos (2004) straipsnyje.

$$\{V(0) = 0 \text{ ir } V(T) \geq 0 \text{ beveik visada}\} \Rightarrow \{V(T) = 0 \text{ beveik visada}\}. \quad (17)$$

Sąlyga „A beveik visada“ reiškia, kad $P(A) = 1$. Tai yra anksčiau minėto bearbitražės rinkos termino formalus apibrėžimas diskretaus laiko finansų rinkos modelyje. Kaip jau minėjome skirsnio pradžioje, ši sąvoka siejama su ERH. Toliau išsiaiškinkime, ką reiškia „ekvivalentusis rizikai neutralus matas“. Mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ apibrėžtas tikimybinis matas P^* vadinamas rizikai neutraliu matu, jei diskontuotas kainos procesas S_k / S_0 yra martingalas atžvilgiu $(\Omega, \mathcal{F}, P^*, \mathbb{F})$ su kiekvienu $k = 1, \ldots, d$. (11) sąryšis rodo, kad sąžiningojo lošimo rinkos matas P yra rizikai neutralus. Toks šio mato pavadinimas atskleidžia tai, kad rizikingos ir nerizikingos akcijų tikėtinų grąžų normos šio mato atžvilgiu yra lygios (plg. su (6) savybe sąžiningojo lošimo rinkoje). Iš tikrųjų, remiantis akcijos grąžos normos apibrėžimu ir tuo, kad $S_0(t)$ yra $\mathcal{F}_{t-1}$-matus su kiekvienu $t = 1, \ldots, T$, teisinga tokia lygybė:

$$E^*\left[\widetilde{R}_k(t)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] = \frac{S_0(t)}{S_k(t-1)} E^*\left[\frac{S_k(t)}{S_0(t)}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] - 1 = \widetilde{R}_0(t),$$

kur E^* yra vidurkis mato P^* atžvilgiu. Tą pačią apibrėžimo sritį turintys du tikimybiniai matai vadinami ekvivalenčiais, jei, be to, abu jie turi tas pačias nulinio mato aibes. Visų rizikai neutralių matų P^*, kurie yra ekvivalentūs matui P, šeimą pažymėkime $\mathcal{P}(P)$. Realaus pasaulio mato P keitimas kitu matu P^* gali rodyti investuotojo polinkį nerizikuoti, suteikiant didesnę svarbą nepageidaujamiems įvykiams ir mažesnę svarbą pageidaujamiems įvykiams.

Pirmoji fundamentalioji vertybių įkainojimo teorema

Vertybinių popierių rinka (S, P) yra bearbitražė tada ir tik tada, kai šeima $\mathcal{P}(P)$ yra netuščia, t. y. egzistuoja bent vienas ekvivalentusis rizikai neutralus matas P^*.

Mato keitimo technika seniai žinoma ir aktuarijams. Pavyzdžiui, tais atvejais, kai apskaičiuojama gyvybės draudimo premija, reali mirtingumo lentelė pakeičiama didesnio mirtingumo lentele. Tačiau reali mirtingumo lentelė pakeičiama mažesnio mirtingumo lentele, kai apskaičiuojama pensijos vienkartinė išmoka.

Antroji arbitražo teorijos pagrindinė teorema apibūdina tas bearbitražes rinkas (S, P), kuriose visos finansinės išmokos yra atkartojamos. Finansine išmoka *(contingent claim)* ateities momentu $t = T$ vadinamas kiekvienas $\mathcal{F}_T$ ir neneigiamas atsitiktinis dydis. Finansinė išmoka H yra atkartojama, jei egzistuoja finansavimosi strategija ψ, kurią atitinka akcijų portfelio vertė laiko momentu $t = T$ yra $V(T) = H$. Atkartojama finansinė išmoka H dabarties momentu $t = 0$ galėtų būti ją atkartojančio portfelio V kaina momentu $t = 0$, t. y. $V(0)$. Be to, jei rinka yra bearbitražė, tai kiekviena kita kaina sukurtų arbitražo galimybę, todėl finansinę išmoką H atkartojančio akcijų portfelio kaina $V(0)$ vadinama sąžiningąja kaina (apie tai plačiau rašoma antro šiai temai skirto straipsnio skyriuje „Finansų inžinerija“ (Leipus, Norvaiša, 2004)). Dėl šios priežasties labai svarbi pilnosios rinkos sąvoka. Rinka *(S, P)* vadinama pilnąja, jeigu kiekviena finansinė išmoka yra atkartojama.

Antroji fundamentalioji vertybių įkainojimo teorema

Bearbitražė vertybinių popierių rinka (S, P) yra pilnoji rinka tada ir tik tada, kai šeima $\mathcal{P}(P)$ yra sudaryta iš vienintelio elemento.

Tolesnė arbitražo teorijos raida susijusi su mėginimais fundamentaliąsias vertybių įkainojimo teoremas apibendrinti keliais aspektais. Vienas iš tokių mėginimų – atsisakyti suvaržančių sąlygų, t. y. nemokamų akcijų pirkimo ir pardavimo sandorių. Šį atvejį pirmojoje fundamentalioje vertybių įkainojimo teoremoje neseniai išplėtojo W. Schachermayer (2004). Kita svarbi veiklos kryptis susijusi su darbais, siekiančiais analogiškas teoremas įrodyti tolydaus laiko atveju.

Tolydaus laiko finansų rinkos arbitražo teorijoje yra spręstinų problemų, kurios neegzistuoja diskretaus laiko atveju. Straipsnio antrame skyriuje, apibrėždami tolydaus laiko finansų rinkos modelį, aptarėme vieną iš problemų – ką laikyti akcijos kaina ir grąža. Kaip matėme, vienas iš reikalavimų buvo tas, kad akcijos kainos ir grąžos procesų trajektorijos turėtų kvadratinę λ-variaciją (žr. 1 priedo (26) formulę). Tačiau šiuolaikinė tolydaus laiko arbitražo teorija plėtojama remiantis rimtesnėmis prielaidomis. Nesigilindami į technines detales, ekvivalentaus rizikai neutralaus mato ir pilnosios rinkos sąvokas aiškinsime matematiniu požiūriu idealiu tolydaus laiko finansų rinkos modeliu.

Tarkime, kad tolydaus laiko finansų rinka $((S_0, S_1), P)$ sudaryta iš nerizikingos akcijos $S_0(t) = e^{rt}$ su tolydžiųjų palūkanų norma $r > 0$ ir rizikingo vertybinio popieriaus, kurio kaina S_1 yra geometrinis *Wiener* procesas pagal (14) formulę. Ar šioje rinkoje egzistuoja ekvivalentusis rizikai neutralus matas P^*, t. y. toks matas, kuris yra ekvivalentus P, o diskontuotas kainos procesas $S^* := S_1 / S_0$ yra martingalas atžvilgiu $(\Omega, \mathcal{F}, P^*, \mathbb{F})$? Nesudėtingi stochastinės analizės veiksmai įtikina, kad kainos procesas S^* yra vienintelis toks stochastinės integralinės lygties sprendinys:

$$S^*(t) = S^*(0) + \int_0^t S^*\,dX, \quad 0 \le t \le T, \tag{18}$$

čia $X(t) = (\mu - r)t + \sigma W(t)$. Ši diskontuotos kainos proceso išraiška rodo, kad S^* yra martingalas atžvilgiu $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$ tada ir tik tada, kai X yra martingalas atžvilgiu $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathbb{F})$, o taip yra tada ir tik tada, kai $\mu = r$, t. y. kai $((S_0, S_1), P)$ – sąžiningojo lošimo rinka.

Toliau tarkime, kad $\mu \ne r$. Kitas stochastinės analizės faktas leidžia teigti, kad savo ruožtu su kiekvienu skaičiumi γ atsitiktinis procesas $W^\gamma(t) := \gamma t + W(t)$, $0 \le t \le T$ yra *Wiener* procesas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P^*)$, o kartu ir martingalas atžvilgiu $(\Omega, \mathcal{F}, P^*, \mathbb{F})$, jei matas P^* nusakomas tokia lygybe:

$$P^*(A) := \int_A \exp\left\{-\gamma W(T) - \frac{\gamma^2 T}{2}\right\} dP, \quad A \in \mathcal{F}. \tag{19}$$

Jei $\gamma := (\mu - r) / \sigma$, tai $X(t) = (\mu - r)t + \sigma W(t) = \sigma W^\gamma(t)$. Remiantis šia X išraiška ir (18) formule, diskontuotos kainos procesas S^* yra martingalas atžvilgiu $(\Omega, \mathcal{F}, P^*, \mathbb{F})$. Be to, kadangi (19) lygybėje pointegrinė funkcija niekur nevirsta 0, matai P ir P^* yra ekvivalentūs. Vadinasi, $((S_0, S_1), P)$ rinkoje egzistuoja bent vienas ekvivalentusis rizikai neutralus matas P^*.

Dabar aptarsime $((S_0, S_1), P)$ pilnąją rinką ir kaip ši savybė leidžia įkainoti išvestines finansines priemones. Kaip ir diskretaus laiko atveju, rinka yra pilnoji, jei kiekviena finansinė išmoka H yra atkartojama, t. y. egzistuoja tokia finansavimosi strategija ψ, kad $V(T) = H$. Čia reikėtų dar patikslinti, ką vadiname finansavimosi strategija. Ankstesnis (16) apibrėžimas gali atrodyti per daug suvaržantis tolydaus laiko atveju, nes portfelio prieaugis vertinamas tik fiksuotais laiko momentais. Paprastai finansavimosi strategija tolydaus laiko atveju apibrėžiama portfelio prieaugį vertinant *Itô* stochastiniu integralu $\int_0^T \psi_k dS_k$ (su sąlyga, kad jis egzistuoja su kiekvienu k). Šiuo atveju ankstesnę finansavimosi strategijos sąlygą pagal (16) apibrėžimą galime pakeisti nauja sąlyga, jeigu su kiekvienu $0 \le t \le T$:

$$V(t) = V(0) + \sum_{k=0}^{d} \int_0^t \psi_k dS_k.$$

Čia portfelio vertės procesas $V = \{V(t) : 0 \le t \le T\}$ apibrėžtas, kaip ir anksčiau, (15) lygybe. Nagrinėkime finansinę išmoką H, turinčią tokią išraišką su kiekvienu atsitiktiniu procesu α^H ir konstanta H_0:

$$H = S_0(T)\left[H_0 + \int_0^T \alpha^H dS^*\right]. \tag{20}$$

Čia, kaip ir anksčiau, $S^* = S_1 / S_0$ yra diskontuotos kainos procesas. Kitame šios temos straipsnyje (žr. Leipus, Norvaiša (2004)) nagrinėjamas konkretus tokios finansinės išmokos pavyzdys. Parodysime, kad finansinė išmoka H yra atkartojama, t. y. egzistuoja tokia finansavimosi strategija ψ, kad $V(T) = H$, ir suskaičiuosime H atkartojančio akcijų portfelio pradinę kainą $V(0)$. Apibrėžkime atsitiktinius procesus $\psi_1 := \alpha^H$ ir $\psi_0(t) := H_0 - \int_0^t \alpha^H dS^* - \left(\alpha^H S^*\right)(t)$, $0 \le t \le T$. Kadangi egzistuoja *Itô* stochastiniai integralai $\int_0^T \psi_k dS_k$, $k = 0, 1$, tai $\psi = (\psi_0, \psi_1)$ yra finansavimosi strategija ir, be to, ją atitinkančio portfelio vertė laiko momentu $t = T$ yra $V(T) = H$. Remiantis J. M. Harrison ir S. Pliska (1981, 3.24 teiginys), ψ yra finansavimosi strategija, kadangi su kiekvienu $0 \le t \le T$:

$$V^*(t) := \psi_0(t) + \psi_1(t)S^*(t) = V^*(0) + \int_0^t \psi_1 dS^*.$$

Taigi finansinė išmoka H pagal (20) formulę yra atkartojama. Anksčiau parodėme, kad diskontuotos kainos procesas S^* yra martingalas atžvilgiu $(\Omega, \mathcal{F}, P^*, \mathbb{F})$, kai P^* yra ekvivalentusis rizikai neutralus matas, apibrėžtas (19) lygybe. Todėl su kiekvienu $0 \le t \le T$ teisingas toks sąryšis:

$$E^*\left[\frac{H}{S_0(T)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = E^*\left[V^*(T)\middle|\mathcal{F}_t\right] = V^*(0) + \int_0^t \alpha^H dS^* = V^*(t) = \frac{V(t)}{S_0(t)}, \tag{21}$$

čia E^* – vidurkis mato P^* atžvilgiu. Konkrečiu atveju, kai $t = 0$, gauname finansinę išmoką atkartojančio portfelio pradinę kainą $V(0) = E^*[H / S_0(T)] = H_0$. Tai, kad kiekviena finansinė išmoka užrašoma (20) formulės išraiška, yra dar vienas stochastinės analizės faktas, kuriuo remiantis rinka $((S_0, S_1), P)$ yra pilnoji.

Šis pavyzdys rodo, kad matematiniu požiūriu idealiame modelyje problemų nėra. Jos atsiranda tada, kai norima idealų modelį pakeisti nors kiek realesniu. Taigi kyla klausimas, kokiai tolydaus laiko finansų rinkos modelių klasei vis dar galima įrodyti pirmosios ir antrosios fundamentaliųjų vertybių įkainojimo teoremų analogus. Pasirodo, kad tokie apibendrinimai įmanomi, tačiau keičiant arbitražo (Delbaen, Schachermayer, 1994) ir pilnosios rinkos sąvokas (Battig, Jarrow, 1999).

3.2. Portfelio teorija

Akcijų portfelio sudarymo problema kyla tada, kai mėginama nuspręsti, kokias ir kiek akcijų laikyti portfelyje siekiant padidinti savo turtą ir vartojimą. Priklausomai nuo rinkos modelio ir prielaidų yra keletas akcijų portfelio problemos sprendimo variantų. Šiuo metu bene daugiausia dėmesio skiriama optimalios investavimo ir vartojimo strategijos paieškai tolydaus laiko finansų rinkos modelio atveju.

Portfelio teorijos sukūrimo data galima laikyti 1952 m., kai H. M. Markowitz (1952) išspausdino vadinamąją efektyviojo portfelio teoriją. H. M. Markowitz nagrinėjo diskretaus laiko finansų rinkos modelį, kuriame $T = 1$, t. y. vieno laikotarpio (statinį) finansų rinkos modelį. Tarkime, kad šiame modelyje kiekvienos akcijos ateities kaina ir kartu grąža $R_k := R_k(1)$, $k = 0, 1, \ldots, d$ yra atsitiktiniai dydžiai, turintys vidurkį $E_k := ER_k$ ir dispersiją $D_k := DR_k = E[R_k - E_k]^2$. (Kadangi $R_k(0) = 0$, šiuo atveju grąža R_k sutampa su grąžos norma $R_k(1)$.) Tarp visų investuotojo turimų akcijų k akcijos dalis yra $w_k \in [0, 1]$, o $\sum_{k=0}^d w_k = 1$ ir investuotojo portfeliu vadinamas vektorius $w := (w_0, \ldots, w_d)$. (Arbitražo teorijoje (žr. (15) lygybę) investuotojo portfeliu $t = 0$ laiko momentu yra vadinamas vektorius $(w_k V(0) / S_k(0)$.) Portfelio w grąža yra $R_{(w)} := \sum_{k=0}^{d} w_k R_k$. H. M. Markowitz teorijos esmė yra ta, kad, sudarant optimalų portfelį w, būtina atsižvelgti į jį sudarančių akcijų grąžų kintamumą ir tarpusavio sąveiką, o šiems veiksniams kiekybiškai vertinti atitinkamai galima taikyti dispersijas D_k ir kovariacijas $\mathrm{Cov}(R_k, R_l) := E[R_k - E_k][R_l - E_l]$. Optimalaus portfelio (vadinamo efektyviuoju portfeliu) parinkimo problemą H. M. Markowitz formulavo kaip matematinį optimizavimo uždavinį: minimizuojama portfelio grąžos dispersija $DR_{(w)}$ su fiksuotu vidurkiu $ER_{(w)}$, t. y. ieškomas toks portfelis w, kurio pasiekiamas minimumas yra:

$$\min_{w}\left\{ DR_{(w)} : ER_{(w)} = v,\ w_k \geq 0,\ \sum_{k=0}^{d} w_k = 1 \right\}. \tag{22}$$

Šis uždavinys iš esmės ekvivalentus portfelio grąžos vidurkio $ER_{(w)}$ maksimizavimui, kai fiksuota dispersija $DR_{(w)}$. Jei galioja tam tikra „neišsigimimo“ sąlyga, siejanti $\{E_k\}$ ir $\{D_k\}$ reikšmes, tai šis uždavinys yra išsprendžiamas, o sprendiniai sudaro efektyviųjų portfelių aibę $F := \{w(v) : v \geq 0\}$. Už šį darbą H. M. Markowitz buvo paskirta Nobelio 1990 m. ekonomikos mokslų premija.

Efektyviojo portfelio optimalumas nėra vienintelė įdomi jos savybė. Aptarsime dar vieną svarbią jo savybę. Tegul tarp akcijų yra vienas nerizikingas vertybinis popierius, kurio grąžos norma yra μ. Tarkime, kad $R_{(p)}$ yra efektyviojo portfelio $p \in F$ grąža, o $R_{(w)}$ – bet kurio portfelio w grąža. Tada, remiantis geometriniais argumentais, galima parodyti, kad:

$$ER_{(w)} - \mu = \frac{Cov(R_{(w)}, R_{(p)})}{DR_{(p)}}(ER_{(p)} - \mu). \tag{23}$$

Svarbiausias (23) lygybėje yra daugiklis $\beta(R_{(w)}, R_{(p)}) := \mathrm{Cov}(R_{(w)}, R_{(p)}) / DR_{(p)}$, vadinamas *beta* koeficientu, kurį galima interpretuoti kaip w portfelio riziką p portfelio ažvilgiu. Tokiu atveju (23) lygybės kairioji pusė reiškia premiją už riziką p portfelio atžvilgiu, nes w portfelio grąža didėja didėjant *beta* koeficientui, ir atvirkščiai.

(23) sąryšis taip pat taikytinas akcijų kainos susidarymo mechanizmui aiškinti. Tarkime, kad visų rinkoje esančių k akcijų visuminė kaina yra M_k. Pažymėkime $M := \sum_{k=0}^{d} M_k$ ir $m_k := M_k / K$. Vektorių $m := (m_0, \ldots, m_d)$ vadinsime rinkos portfeliu, tada $R_{(m)} = \sum_{k=0}^{d} m_k R_k$ yra rinkos grąža. Parodysime, kad, tam tikru būdu apibrėžus rinkos pusiausvyrą, rinkos portfelis tampa efektyvus. Tuomet jam galėsime pritaikyti (23) sąryšį, kai $p = m$.

Tarkime, kad M yra rinkos pasiūla. Norėdami sukurti paklausą, tarkime, kad rinkoje yra I investuotojų ($i = 1, \ldots, I$) ir visi jie „tiki“ tuo pačiu tikimybiniu matu P. Vadinasi, visi jie sudaro tą pačią efektyviųjų portfelių aibę F. Investuotojai gali skolintis vienas iš kito su palūkanų norma μ. Tai tolygu tam, kad rinkoje yra dar vienas nerizikingas vertybinis popierius su šia palūkanų norma, nekeičiantis rinkos pasiūlos dydžio M. Taip pat, tarkime, kad i investuotojo grąžą $e_i > \mu$ atitinkantis efektyvusis portfelis yra $w(e_i) = \{w_k(e_i)\}$, o W_i – jo investicijos dydis. Tada k akcijos visuminė paklausa yra $P_k := \sum_{i=1}^{I} w_k(e_i) W_i$. Pažymėkime $W := \sum_{i=1}^{I} W_i = \sum_{k=0}^{d} P_k$. Tada k akcijos santykinė visuminės paklausos dalis yra $\delta_k := P_k / W$. Kadangi efektyvių portfelių aibė F yra iškila, visuminės paklausos portfelis $\delta := \{\delta_k\}_{k=0}^{d} = \left\{ \sum_{i=1}^{I} w_k(e_i) W_i / W \right\}_{k=0}^{d} = w\left(\sum_{i=1}^{I} e_i W_i / W \right)$ taip pat yra efektyvus ir $\sum_{i=1}^{I} e_i W_i / W > \mu$. Sakykime, kad rinka išlaiko pusiausvyrą, jei $M_k = D_k$ su kiekvienu $k = 1, \ldots, d$, t. y. kiekvienos akcijos pasiūla lygi jos paklausai. Taigi pusiausvyros rinkoje portfeliai m ir δ sutampa, o m yra efektyvusis portfelis, kadangi toks yra portfelis δ. Todėl, remiantis (23) lygybe, k akcijos grąžos vidurkis yra:

$$ER_k = \mu + \beta(R_k, R_{(m)})\,(ER_{(m)} - \mu). \tag{24}$$

(24) sąryšis susieja akcijos tikėtiną grąžą ER_k su nerizikingo vertybinio popieriaus grąža μ ir šios akcijos rizika $\beta(R_k, R_{(m)})$. Gautas sąryšis – tai akcijos kainos susidarymo pavyzdys, vadinamas kapitalo rinkos vertinimo modeliu *(capital asset pricing model)*, o jo pradininkai buvo W. F. Sharpe (1964), J. Lintner (1965) ir J. Mossin (1966). Už šį darbą W. F. Sharpe (kartu su H. M. Markowitz ir M. H. Miller) paskirta Nobelio 1990 m. ekonomikos mokslų premija. (24) sąryšį galima palyginti su sąžiningojo lošimo hipoteze (5), iš kurios išplaukia lygybė $ER_k = \mu$, t. y. sąžiningasis lošimas yra kapitalo rinkos vertinimo modelio konkretus atvejis, kai akcijos rizika $\beta(R_k, R_{(m)})$ lygi 0.

Šiuolaikinė portfelio teorija, be portfelio grąžos dispersijos minimizavimo (ar vidurkio maksimizavimo), taip pat nagrinėja investuotojo turto (ir vartojimo) maksimizavimo uždavinį remiantis naudingumo funkcija. Išsiaiškinkime, kaip šie uždaviniai susiję vienas su kitu konkretaus laikotarpio finansų rinkos modelio atžvilgiu. Sakykime, kad ψ_k yra investuotojo turimų k akcijų kiekis su kiekvienu $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$, o $V(t)$ – investuotojo turimas visas turtas laiko momentais $t \in \{0, 1\}$ (tas pats, kas arbitražo teorijoje vadinama portfelio verte). Tada vektorius $\psi = (\psi_0, \ldots, \psi_d)$ vadinamas investuotojo strategija $V(t) = \sum_{k=0}^{d} \psi_k S_k(t)$ ir $w_k = \psi_k S_k(0) / V(0)$.

Remdamiesi grąžos apibrėžimu (2), gauname tokį sąryšį:

$$R_{(w)} = \sum_{k=0}^{d} w_k R_k = \sum_{k=0}^{d} \frac{\psi_k S_k(0)}{V(0)} \cdot \frac{S_k(1)}{S_k(0)} - \sum_{k=0}^{d} w_k = \frac{V(1)}{V(0)} - 1$$

arba $V(1) = V(0)[1 + R_{(w)}]$. Pagal šį sąryšį galima patikrinti, kad (22) optimizavimo uždavinys yra ekvivalentus tokiai optimizavimo problemai: duotam $x > 0$ sukurti tokią strategiją ψ, kuri pasiekia minimumą min $\{DV(1) : EV(1) = x\,(1 + \nu),\ V(0) = x\}$.

Tegul kiekvienam realiam skaičiui $y - U(y) := -(1/2)y^2 + \lambda y$. Taikant *Lagrange* daugiklių metodą, galima parodyti, kad šis minimizavimo uždavinys tampa maksimizavimo uždaviniu: duotam $x > 0$ sukurti tokią strategiją ψ, kuri pasiekia maksimumą max $\{EU(V(1)) : V(0) = x\}$.

Tai kita investuotojo portfelio problemos išraiška, kuri atitinka įvairius naudingumo funkcijos U pavidalus ir kuriai spręsti taikoma šio skyriaus pirmame skirsnyje aptariama arbitražo teorija. Gana išsami portfelio teorijos apžvalga, skirta diskretaus laiko finansų rinkos modeliams, išdėstyta M. C. Steinbach (2001) darbe.

Toliau suformuluosime portfelio problemą tolydaus laiko finansų rinkos modeliui, kai kainos gali kisti kiekvienu laiko momentu $t \in D := [0, T]$. Šiuo atveju su kiekvienu $k \in \{0, 1, \ldots, d\}$ akcijos kaina $S_k = \{S_k(t) : t \in D\}$ ir investuotojo turimas jų kiekis $\psi_k = \{\psi_k(t) : t \in D\}$ yra atsitiktiniai procesai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ir suderinti su informacijos srautu $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t : t \in D\}$. Paprastai tariama, kad S_k ir ψ_k yra tokie procesai, kuriems turi prasmę *Itô* stochastinis integralas $\int_0^T \psi_k dS_k$. Investuotojo strategija vadinamas vektorius $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_d)$, o investuotojo turto procesu – procesas $V = \{V(t) : t \in D\}$, apibrėžtas (15) lygybe. Vartojimo procesu vadinsime kiekvieną neneigiamą ir *Lebesgue* prasme integruojamą procesą $c = \{c(t) : t \in D\}$. Strategija ψ vadinama finansavimosi strategija, jeigu su kiekvienu $t \in D$:

$$V(t) = V(0) + \sum_{k=0}^{d} \int_0^t \psi_k dS_k - \int_0^t c(s)ds. \tag{25}$$

Ši investuotojo strategijos ψ savybė reiškia, jog turto pokytis $V(t) - V(s)$ priklauso tik nuo pajamų, gautų prekiaujant akcijomis rinkoje ir vartojimo laikotarpiu nuo s iki t. Kai nėra vartojimo, t. y. $c \equiv 0$, finansavimosi strategijos sąvoka sutampa su arbitražo teorijos sąvoka.

Investuotoją domina tokia finansavimosi strategija ψ ir toks vartojimo procesas c, kurie maksimizuoja funkciją $J(x;\psi,c) := E\left[\int_0^T U_1(t,c(t))dt + U_2(V(T))\right]$, esant nustatytoms naudingumo funkcijoms U_1, U_2 ir nustatytai pradinei turto vertei $V(0) = x$. Tegul $A(x)$ yra aibė tokių finansavimosi strategijos ir vartojimo proceso porų (ψ, c), kurioms ši funkcija yra apibrėžta ir baigtinė. Taigi investuotojo, turinčio pradinį kapitalą $x > 0$, portfelio problema yra optimizavimo uždavinys:

$$\max \{J(x;\ \psi, c) : (\psi, c) \in A(x)\}.$$

Paprastai skiriami du pagrindiniai šio uždavinio sprendimo metodai. Pirmas metodas grindžiamas stochastinio valdymo teorija. Optimalus sprendinys gaunamas dalinėmis išvestinėmis išsprendus netiesinę lygtį, vadinamą *Hamilton–Jacobi–Bellman* lygtimi. R. C. Merton (1971) įrodė, kad portfelio problema išsprendžiama šiuo metodu ir, be to, turi išreikštinį pavidalą tuo atveju, kai $d = 1$, S_0 yra tolydžiosios sudėtinės palūkanos, S_1 – geometrinis *Wiener* procesas, o U_1, U_2 – specialaus pavidalo naudingumo funkcijos. Nors šiek tiek bendresniu atveju *Hamilton–Jacobi–Bellman* lygtį sunku išspręsti net ir skaitiniais metodais. Antras portfelio problemos sprendimo metodas pagrįstas stochastine analize. Šis metodas leidžia nagrinėti ir išspręsti optimizavimo uždavinį šiek tiek bendresniais atvejais.

Išvados

Pirma, straipsnyje aptarti moderniosios finansų rinkos teorijos rezultatai rodo, kad šios teorijos pagrindų suvokimas yra glaudžiai susijęs su matematikos mokslu. Kitaip negu kitos ekonomikos teorijos sritys, finansų rinkos teorija iš esmės pagrįsta šiuolaikine atsitiktinių procesų teorija ir stochastine analize. Tai galima paaiškinti tik tuo, kad finansų rinkos teorija neįsivaizduojama be ateities neapibrėžtumo mokslinės interpretacijos, kurią ir suteikia matematinė tikimybių teorija.

Antra, straipsnyje aptarti rezultatai rodo, kad esminiai finansų rinkos teorijos rezultatai (fundamentaliosios vertybių įkainojimo teoremos) pagrįstos arbitražo negalimumu. Be to, bearbitražės vertybinių popierių rinkos prielaida yra vienas iš pagrindinių ERH teorinių argumentų. Šis sąryšis ir rodo moderniosios finansų rinkos teorijos priklausomybę nuo ERH.

Trečia, akcijos kainos susidarymo mechanizmas moderniojoje finansų rinkos teorijoje nusakomas grąžos savybėmis ir jos sąryšiu su kaina. Šių sąryšių svarba ypač išryškėja nagrinėjant tolydaus laiko finansų rinkos modelius. Be to, grąžos savybės ir arbitražo negalimumas glaudžiai siejasi per tas pačias fundamentaliąsias vertybių įkainojimo teoremas.

Ketvirta ir svarbiausia, visi šie paminėti moderniosios finansų rinkos teorijos aspektai leidžia manyti, kad tolesnė teorijos plėtotė priklausys nuo arbitražo ir ERH hipotezės sampratos evoliucijos.

1 priedas

Akcijos kaina ir grąža tolydaus laiko modelyje

Šiame priede nagrinėjamas akcijos kainos ir grąžos sąryšis, panašus į tą, kuris apibrėžiamas eksponente ir logaritmu, t. y. $S(t) = \exp\{R(t)\}$ ir $R(t) = \ln\{S(t)\}$. Kaip rodo (13) formulė, toks sąryšis gaunamas, kai R yra tiesinė funkcija. Tokį patį sąryšį gautume, jei funkcija R būtų tolydi ir baigtinės variacijos. Tačiau pastaroji savybė nėra teisinga, kai R yra *Wiener* proceso trajektorija. Todėl apibendrinant (13) formulę, *Wiener* proceso atveju tenka naudotis kitomis funkcijų savybėmis. Tokias savybes nusako funkcijos kvadratinė variacija ir p-variacija.

Tarkime, kad su kiekvienu $m \in \{1, 2, \ldots\}$ λ_m yra intervalo $[0, T]$ skaidinys $0 = t_0^m < t_1^m < \ldots < t_{n(m)}^m = T$. Taip pat tarkime, kad $\lambda_m \subset \lambda_{m+1}$ su visais m ir aibė $\bigcup\{\lambda_m : m \geq 1\}$ tiršta intervale $[0, T]$. Pažymėkime $D[0, T]$ aibę visų funkcijų $f : [0, T] \to \mathbb{R}$, kurios yra tolydžios iš dešinės kiekviename taške $t \in [0, T)$ ir kurioms egzistuoja ribos iš kairės $f(t-)$ kiekviename taške $t \in (0, T]$. Toliau tokios funkcijos f šuolį taške $t \in (0, T]$ žymėsime $\Delta f\,(t) := f(t) - f(t-)$. Sakykime, kad funkcija $f \in D[0, T]$ turi kvadratinę λ-variaciją intervale $[0, T]$, jei egzistuoja tokia funkcija $[f]_\lambda \in D[0, T]$, kad: a) $[f]_\lambda(0) = 0$, b) $\Delta[f]_\lambda(t) = [\Delta f(t)]^2$ ir c) riba

$$[f]_\lambda(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} \left[f(t_i^m \wedge t) - f(t_{i-1}^m \wedge t)\right]^2 \tag{26}$$

egzistuoja ir lygybė yra teisinga su kiekvienu $t \in (0, T]$. Kadangi funkcija $[f]_\lambda$ yra nedidėjanti, egzistuoja jos išskaidymas į tolydžią dalį $[f]_\lambda^c$ ir visur trūkią dalį $\sum_{(0,\cdot)} [\Delta f]^2$. Kaip matome, kvadratinė λ-variacija $[f]_\lambda$ egzistuoja ir visur lygi 0, jei f yra tolydžioji baigtinės variacijos funkcija.

Nenulinę kvadratinę λ-variaciją turi beveik visos *Wiener* proceso trajektorijos. Tiksliau – egzistuoja tokia nulinio mato aibė $N(\lambda) \in \mathcal{F}$, kad $[W]_\lambda(t) := [W(\cdot, \omega)]_\lambda(t) = t$ su visais $t \in (0, T]$ ir $\omega \in \Omega \setminus N(\lambda)$. Kadangi *Wiener* proceso trajektorijos yra tolydžios, jos kvadratinės λ-variacijos trūkioji dalis lygi 0. Kvadratinės variacijos savybė *Wiener* procesui yra tiksli ta prasme, kad $\bigcup_\lambda N(\lambda) = \Omega$. Šias ir daugelį kitų *Wiener* proceso savybių įrodė P. Lévy (1940).

Kita funkcijos charakteristika – funkcijos p-variacija – pirmą kartą *Fourier* eilučių teorijoje buvo panaudota N. Wiener (1924). Kiekvienam $0 < p < \infty$ ir funkcijai $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ dydis

$$v_p\big(f; [0, T]\big) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \left|f(t_i) - f(t_{i-1})\right|^p : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\right\} \tag{27}$$

vadinamas f funkcijos p-variacija intervale $[0, T]$. Sakoma, kad f funkcija turi baigtinę p-variaciją, jei $v_p(f; [0, T]) < \infty$. Baigtinės variacijos funkcija yra funkcija, turinti baigtinę 1-variaciją. Jei funkcija turi baigtinę variaciją, tai jos p-variacija yra baigtinė su kiekvienu $1 \leq p < \infty$. Bet ne atvirkščiai, kaip rodo *Wiener* proceso trajektorijos pavyzdys. Natūralu, kad *Wiener* procesui 2-variacija $v_2(W(\cdot, \omega); [0, T]) = +\infty$, o kiekvienam $p > 2$ p-variacija $v_p(W(\cdot, \omega); [0, T]) < +\infty$ beveik su visais $\omega \in \Omega$. Pastarąją savybę aišku nulemia jau minėta *Wiener* proceso *α-Hölder* savybė, teisinga su kiekvienu $\alpha < 1/2$.

Dabar jau galime apibrėžti akcijos kainos ir grąžos procesus tolydaus laiko finansų rinkos modelyje. Tarkime, funkcija $R \in D[0, T]$ turi kvadratinę λ-variaciją $[R]_\lambda$ intervale $[0, T]$. Tada ribos

$$S(t) := \lim_{m\to\infty} \prod_{i=1}^{n(m)} \left[1 + R\left(t_i^m \wedge t\right) - R\left(t_{i-1}^m \wedge t\right)\right] = \\ = \exp\left\{R(t) - (1/2)\left[R\right]_\lambda^c(t)\right\}\prod_{[0,\,t]}(1+\Delta R)e^{-\Delta R} \tag{28}$$

egzistuoja kiekviename taške $t \in [0, T]$. Be to, funkcija $S \in D[0, T]$ turi kvadratinę λ-variaciją $[S]_\lambda$, apibrėžtą tokia lygybe:

$$\left[S\right]_\lambda(t) = \int_0^t S^2 d\left[R\right]_\lambda, \quad 0 \le t \le T \tag{29}$$

kurioje integralas egzistuoja sutankinto *Riemann–Stieltjes* integralo prasme, ir yra integralinės lygties

$$S(t) = 1 + \int_0^t S d_\lambda R, \quad 0 \le t \le T \tag{30}$$

sprendinys. (30) lygtyje integralas yra intervalo $[0, T]$ skaidinius λ_m, $m \ge 1$ atitinkančių *Riemann–Stieltjes* sumų riba, kai $m \to \infty$, t. y.:

$$\int_0^t S d_\lambda R := \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} S\left(t_{i-1}^m \wedge t\right)\left[R\left(t_i^m \wedge t\right) - R\left(t_{i-1}^m \wedge t\right)\right].$$

Be to, (28) lygybe apibrėžtai funkcijai S egzistuoja riba iš dešinės pusės

$$R(t) = \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n(m)} \left[S\left(t_i^m \wedge t\right) - S\left(t_{i-1}^m \wedge t\right)\right] / S\left(t_{i-1}^m \wedge t\right) = \int_0^t S^{-1} d_\lambda S \tag{31}$$

ir lygybės galioja su kiekvienu $t \in [0, T]$. Kaip matome, tolydžiosios baigtinės variacijos funkcijos R dešinioji (28) lygybės pusė yra tiesiog eksponentė $\exp\{R(t)\}$, o dešinioji (31) lygybės pusė yra logaritmas $\ln\{S(t)\}$.

Taigi (28) ir (31) lygybės apibendrina eksponentinės ir logaritminės transformacijų dualumą. (28) lygybe apibrėžta funkcija S vadinama akcijos kaina, o (31) lygybe apibrėžta funkcija R – akcijos grąža. Abi funkcijos yra apibrėžtos tik tuo atveju, kai jos turi kvadratinę λ-variaciją kiekvienam λ. Funkcijos R kvadratinės λ-variacijos egzistavimas būtinas tam, kad egzistuotų riba (28) lygtyje, jei papildomai R yra tolydi ir $v_p(R; [0, T]) < \infty$ su kiekvienu $p < 3$. Jei $v_p(R; [0, T]) < \infty$ su kiekvienu $p < 2$, tai riba (28) lygtyje ir integralas (30) lygtyje egzistuoja klasikinės analizės prasme, t. y. ribos egzistuoja (visų) intervalo skirstinių smulkinimo prasme. Šiuos teiginius ir daugelį kitų faktų, susijusių su baigtinės p-variacijos funkcijų analize, įrodė R. M. Dudley, R. Norvaiša (1999, 2000).

Literatūra

Aubin J.-P., 1984. L'analyse non linéaire et ses motivations économiques. Paris: Masson. Russian transl., 1988. Moscow: Mir.

Bachelier L., 1900. Théorie de la spéculation. Annales de l'Ecole normale supériore. Transl. by A. J. Boness: Theory of Speculation // Random Character of Stock Market Prices, P. H. Cootner (ed.), 1964. Cambridge: MIT Press.

Barndorff-Nielsen O. E., 1998. Processes of Normal Inverse Gaussian Type // Finance and Stochastics, Vol. 2, p. 41–68.

Battig R. J., Jarrow, R. A., 1999. The Second Fundamental Theorem of Asset Pricing: A New Approach // The Review of Financial Studies, Vol. 12, p. 1219–1235.

Bernstein P. L., 1992. Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street. New York: The Free Press.

Bowman R. G., Buchanan J., 1995. The Efficient Market Hypothesis – a Discussion of Institutional, Agency and Behavioral Issues // Australian Journal of Management, Vol. 20, p. 155–166.

Cowles A., 1933. Can Stock Market Forecasters Forecast? // Econometrica, Vol. 1, p. 309–324.

Debreu G., 1959. Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. A Cowles Foundation Monograph 17, Yale University Press.

Delbaen F., Schachermayer W., 1994. A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing // Mathematische Annalen, Vol. 300, p. 463–520.

Dudley R. M., Norvaiša R., 1999. Differentiability of Six Operators on Nonsmooth Functions and p-Variation. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1703. Berlin: Springer.

Fama E. F., 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work // Journal of Finance, Vol. 25, p. 383–417.

Frankfurter G. M., McGoun E. G., 1999. Ideology and the Theory of Financial Economics // Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 39, p. 159–177.

Grigelionis B., 2001. Generalized z-Distributions and Related Stochastic Processes // Lietuvos matematikos rinkinys, t. 41, p. 303–319.

Harrison J. M., Kreps D. M., 1979. Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Market // Journal of Economic Theory, Vol. 20, p. 381–408.

Harrison J. M., Pliska S., 1981. Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading // Stochastic Processes and Their Applications, Vol. 11, p. 215–260.

Haugen R. A., 1999. The New Finance: The Case Against Efficient Markets. New Jersey: Prentice Hall.

Jensen M., 1978. Some Anomalous Evidence Regarding Market Efficiency // Journal of Financial Economics, Vol. 6, p. 95–101.

Kendall M. G., 1953. The Analysis of Economic Time-Series. Part I: Prices // Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 96, p. 11–25.

Leipus R., Norvaiša, R., 2004. Finansų rinkos teorijų taikymai // Pinigų studijos, Nr. 1 (priimta spaudai).

LeRoy S. F., 1989. Efficient Capital Markets and Martingales // Journal of Economic Literature, Vol. 27, p. 1583–1612.

Lévy P., 1940. Le Mouvement Brownien Plan // American Journal of Mathematics, Vol. 62, p. 487–550.

Lintner J., 1965. The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets // Review of Economics and Statistics, Vol. 47, p. 346–382.

Lo A. W., MacKinlay A. C., 1999. A Non-Random Walk Down Wall Street. Princeton: University Press.

Malkiel B. G., 1996. A Random Walk Down Wall Street. New York: W. W. Norton & Company.

Mandelbrot B., 1966. Forecasts of Future Prices, Unbiased Markets and Martingale Models // Journal of Business, Vol. 39, p. 242–255.

Mandelbrot B. B., 1997. Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. New York: Springer.

Markowitz H., 1952. Portfolio Selection // Journal of Finance, Vol. 7, p. 77–91.

Merton R. C., 1971. Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model // Journal of Economic Theory, Vol. 3, p. 373–413.

Mossin J., 1966. Equilibrium in a Capital Asset Market // Econometrica, Vol. 35, p. 768–783.

Nobelio 2002 m. ekonomikos mokslų premijos laureatai // Pinigų studijos, 2003, Nr.1, p. 97–114.

Norvaiša R., 2000. Modelling of Stock Prices: A Real Analysis Approach // Finance and Stochastics, Vol. 3, p. 343–369.

Osborne M. F. M., 1959. Brownian Motion in the Stock Market // Operations Research, Vol. 7, p. 145–173.

Paulos J. A., 2003. A Mathematician Plays the Stock Market. New York: Basic Books.

Prechter Jr. R. R., 1999. The Wave Principle of Human Social Behavior and the New Science of Socionomics, New Classics Library.

Ross S. A., 1987. The Interrelations of Finance and Economics: Theoretical Perspectives // The American Economic Review, Vol. 77, p. 29–34.

Rubinstein M., 2001. Rational Markets: Yes or No? The Affirmative Case // Financial Analysis Journal, Vol. 57, p. 15–29.

Samuelson P. A., 1965. Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly // Industrial Management Review, Vol. 6, p. 41–49.

Samuelson P. A., 1973. Mathematics of Speculative Price // SIAM Review, Vol. 15, p. 1–42.

Schachermayer W., 2004. The Fundamental Theorem of Asset Pricing under Proportional Transaction Costs in Finite Discrete Time // Mathematical Finance, Vol. 14, p. 19–48.

Sharpe W., 1964. Capital Asset Prices: A Theory of Capital Market Equilibrium under Conditions of Risk // Journal of Finance, Vol. 19, p. 425–442.

Steinbach M. C., 2001. Markowitz Revisited: Mean-Variance models in Financial Portfolio Analysis // SIAM Review, Vol. 43, p. 31–85.

Webster's Encyclopedic Unabridged Dictionary of the English Language, 1989. New York/Avenel, New Jersey: Gramerey Books.

Wiener N., 1923. Differential Spaces // Journal of Mathematical Physics, Vol. 2, p. 131–174.

Wiener N., 1924. The Quadratic Variation of a Function and Its Fourier Coefficients // Journal of Mathematical Physics, Vol. 3, p. 72–94.

Williams J. B., 1938. The Theory of Investment Value. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Working H., 1934. A Random Difference Series for Use in the Analysis of Time Series // Journal of the American Statistical Association, Vol. 29, p. 11–24.

Straipsnis gautas 2003 m. rugsėjo mėn.
Priimtas spaudai 2003 m. lapkričio mėn.

SUMMARY

FUNDAMENTALS OF FINANCIAL MARKET THEORIES

Remigijus Leipus, Rimas Norvaiša

This is the first part of a review of the modern theory of financial market and of its several recent developments. The review aims at clarifying the role of the efficient market hypothesis played from the beginning of the development of the modern theory until today. In particular, some attention is given to the controversy surrounding the hypothesis with respect to both theoretical and empirical aspects. The reader is supposed to know nothing about the financial market theories. However, to understand some parts of the paper, mathematical sophistication might be helpful for the reader.

The present part of the paper, starting with an introduction, consists of three sections. The first section deals with the efficient market hypothesis. Starting with the work of L. Bachelier and several later works on the empirical research of stock prices, the reader is introduced to the hypothesis as formulated by E. F. Fama. Then the theoretical and empirical foundation of the efficient market hypothesis is discussed in some detail. The views on the hypothesis, which dominated the beginning of the modern theory until its culmination time around the end of the eighties of the last century, are presented. The discussion of recent views is postponed until the last section of the second part of the paper.

The second section is devoted to clarifying the understanding of a mathematical model in financial theories. The emphasis is made on the distinction between a discrete time model and a continuous time model. The concepts of stock price and stock return are considered as basic. The discrete time model is illustrated by presenting and discussing the fair game hypothesis. In the context of the fair game model, the analytical form of the efficient market hypothesis and the fundamental value are derived. The continuous time model is illustrated by discussing the geometric Wiener process and its several alternatives. In the appendix of the paper,

a motivation for the special form of the continuous time price and return are given. The arguments rest on recent results concerning the existence of the product integral with respect to functions having bounded p-variation for some $p < 2$ or functions having the quadratic variation, and so the motivation is new as far as we know.

The last and the main section presents the basic results of the modern theory of financial market: the arbitrage theory and the portfolio theory. The arbitrage theory is discussed by presenting the two fundamental theorems of asset pricing in the context of the discrete time model. In the continuous time context, the basic concepts of arbitrage, risk-neutral measure and completeness are illustrated for the case when a stock price follows the dynamics of a geometric Wiener process. First, the portfolio theory is illustrated by showing how the capital asset pricing model follows from the efficient portfolio theory of H. Markowitz. Second, the mean-variance optimality formulation is related to portfolio optimization problems in the form used in the continuous time models.